



# Marche aléatoire sur un groupe : propriétés dimensionnelles de la mesure harmonique

Vincent Le Prince

## ► To cite this version:

Vincent Le Prince. Marche aléatoire sur un groupe : propriétés dimensionnelles de la mesure harmonique. Mathématiques [math]. Université Rennes 1, 2004. Français. NNT : . tel-00008442

**HAL Id: tel-00008442**

**<https://theses.hal.science/tel-00008442>**

Submitted on 10 Feb 2005

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

*présentée*

DEVANT L'UNIVERSITÉ DE RENNES I

*pour obtenir*

le grade de DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES I

Mention Mathématiques et Applications

*par*

**Vincent LE PRINCE**

Institut de Recherche Mathématique de Rennes

École Doctorale MATISSE

U.F.R. de Mathématiques

TITRE DE LA THÈSE :

***Marche aléatoire sur un groupe :  
propriétés dimensionnelles de la mesure harmonique***

Soutenue le 20 décembre 2004 devant la Commission d'Examen

COMPOSITION DU JURY :

M. Yves DERRIENNIC	Examineur
M. Yves GUIVARC'H	Examineur
M. Vadim KAIMANOVICH	Directeur
M. François LEDRAPPIER	Rapporteur
M. Frédéric MATHÉUS	Examineur
M. Mark POLLICOTT	Rapporteur
M. Anton ZORICH	Examineur



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>1 Marche aléatoire et quantités asymptotiques</b>	<b>11</b>
1.1 Définition . . . . .	11
1.2 Frontière de Poisson . . . . .	12
1.3 Quantités asymptotiques . . . . .	13
1.4 $\mu$ -frontières . . . . .	14
<b>2 Singularité de la mesure harmonique sur le bord d'un groupe hyperbolique</b>	<b>17</b>
2.1 Préliminaires et notations . . . . .	17
2.2 Une formule intégrale pour la vitesse de fuite . . . . .	21
2.3 Lien entre les quantités asymptotiques et la dimension de Hausdorff de la mesure harmonique . . . . .	24
2.4 Construction d'une mesure harmonique de petite dimension . . . . .	27
2.5 Résultat principal . . . . .	31
2.6 Comportement asymptotique de la suite $(\nu_k)$ . . . . .	32
<b>3 Problème des générateurs extrémaux pour les produits libres de groupes finis</b>	<b>35</b>
3.1 Mesure harmonique . . . . .	37
3.2 Cas où l'ensemble générateur est $\Sigma$ . . . . .	38
3.3 Groupes fortement markoviens . . . . .	42
3.4 Cas où l'ensemble générateur $S$ est quelconque . . . . .	44
<b>4 Marche aléatoire sur un groupe semi-simple : estimation de la dimension de la mesure harmonique</b>	<b>47</b>
4.1 Préliminaires et notations . . . . .	47
4.2 Lien entre $h$ , les exposants et la dimension de $\nu$ : cas de $SL(d, \mathbb{R})$ . . . . .	53
4.3 Extension de la majoration de la dimension à un cadre plus général . . . . .	60
<b>5 Marche aléatoire sur un groupe semi-simple : construction d'une mesure harmonique singulière</b>	<b>65</b>
5.1 Construction : cas de $SL(d, \mathbb{R})$ . . . . .	65
5.2 Conclusion : cas de $SL(d, \mathbb{R})$ . . . . .	70
5.3 Un point de vue géométrique sur cette construction . . . . .	70
5.4 Conclusion dans le cas général . . . . .	82

<b>6</b>	<b>Appendice : dimension</b>	<b>83</b>
6.1	Généralités . . . . .	83
6.2	Cas du bord d'un groupe hyperbolique . . . . .	85
6.3	Cas des Grassmanniennes . . . . .	86
	<b>Bibliographie</b>	<b>91</b>

# Introduction

Cette thèse a pour objet l'étude de la mesure harmonique associée à une marche aléatoire sur un groupe hyperbolique ou sur un sous-groupe discret d'un groupe semi-simple. Dans ces deux cadres, les groupes sont munis d'un bord géométrique naturel, qui porte la mesure harmonique ; on étudie les relations entre celle-ci et la structure métrique du bord. Plus précisément on s'intéresse à la dimension de la mesure harmonique ainsi qu'à ses relations avec deux autres quantités associées à la marche aléatoire : l'entropie asymptotique et la vitesse de fuite.

Précisons un peu les objets de cette étude (des détails sont fournis dans le Chapitre 1 ainsi que dans les parties préliminaires respectives de chaque chapitre).

Etant donné un groupe dénombrable  $\Gamma$  et une mesure de probabilité  $\mu$  sur  $\Gamma$ , on appelle marche aléatoire sur  $\Gamma$  associée à  $\mu$  le processus  $(x_n)_{n \geq 0}$  défini de la manière suivante :  $x_0 = e$ , et, pour  $n > 0$ ,  $x_n = h_1 \cdots h_n$ ,  $(h_i)_{i \geq 1}$  étant une suite de variables aléatoires indépendantes de loi  $\mu$ . On note  $H(\lambda)$  l'entropie usuelle de la mesure de probabilité à support dénombrable  $\lambda$ . Lorsque  $H(\mu)$  est finie, on définit l'entropie asymptotique de la marche ([Ave76]) par :

$$h(\Gamma, \mu) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H(\mu^n)}{n} ,$$

$\mu^n$  désignant la convolée  $n^{\text{eme}}$  de  $\mu$ , c'est à dire la loi de  $x_n$ . Si  $\Gamma$  agit par isométries sur un espace métrique  $(X, d)$ , muni d'un point de base  $o$ , on définit, pour une mesure de probabilité  $\lambda$ ,

$$L(\lambda) = \sum_{g \in \Gamma} \lambda(g) d(o, go) ;$$

et lorsque  $\mu$  admet un moment d'ordre 1, c'est à dire  $L(\mu) < \infty$ , on définit la vitesse de fuite de la marche aléatoire ([Gui80]) par :

$$l(\Gamma, \mu) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L(\mu^n)}{n} .$$

L'entropie asymptotique mesure le taux d'accroissement asymptotique de l'entropie de la loi de  $x_n$ , la vitesse de fuite l'accroissement asymptotique de la distance moyenne de  $x_n o$  à  $o$ .

La notion de frontière de Poisson a été introduite dans ce cadre par Furstenberg ([Fur63]). On peut la définir comme un espace probabilisé  $(\mathcal{B}, \nu)$  sur lequel  $\Gamma$  agit, tel que  $\nu$  soit  $\mu$ -stationnaire, c'est à dire  $\mu * \nu = \nu$ , et qui est, en un certain sens, maximal possédant cette propriété. Une définition comme espace probabilisé abstrait

a été introduite dans [KV83]. La mesure  $\nu$  est alors appelée mesure harmonique. Ce vocabulaire est dû à l'analogie avec la "formule de Poisson" classique : pour toute fonction  $f$  bornée  $\mu$ -harmonique sur  $\Gamma$ , c'est à dire vérifiant pour tout  $x$

$$\sum_{g \in \Gamma} \mu(g) f(xg) = f(x) ,$$

il existe une unique fonction  $F$  dans  $L^\infty(\mathcal{B}, \nu)$  telle que

$$f(g) = \int_{\mathcal{B}} F(\xi) d\nu(\xi) .$$

Les groupes auxquels on va s'intéresser sont d'une part les sous-groupes d'isométries des espaces hyperboliques au sens de Gromov agissant proprement discontinûment (Chapitre 2), d'autre part les sous-groupes discrets des groupes de Lie semi-simples, qui peuvent être vus comme les sous-groupes discrets d'isométries des espaces symétriques (Chapitres 4 et 5). Décrivons alors brièvement leurs frontières de Poisson.

Dans le cas d'un espace hyperbolique  $X$ , si le groupe  $\Gamma$  engendré par le support de  $\mu$  est non-élémentaire, alors la marche aléatoire  $(x_n)$  converge presque sûrement vers un point  $x_\infty$  du bord géométrique  $\partial X$ . Si de plus  $\mu$  possède un moment d'ordre 1, alors  $\partial X$  muni de la loi de  $x_\infty$  s'identifie à la frontière de Poisson ([Kai00]).

Dans le cas d'un groupe de Lie semi-simple sans facteur compact à centre fini  $G$ , lorsque le support de  $\mu$  engendre un sous-groupe discret Zariski-dense  $\Gamma$  et  $\mu$  possède un moment d'ordre 1, cette frontière s'identifie à  $G/P$  muni de son unique mesure  $\mu$ -stationnaire  $\nu$ ,  $P$  étant un sous-groupe parabolique minimal de  $G$  ([Kai85], [Led85], [GR85], [GM89]). Dans le cas où  $G = SL(d, \mathbb{R})$ , il s'agit de l'espace des drapeaux complets.

**Remarque.** *On sait en fait décrire ces frontières sous des hypothèses plus faibles (voir [Kai00]). On peut par exemple affaiblir l'hypothèse de moment, mais comme on va travailler avec la vitesse de fuite, on supposera tout le temps que  $\mu$  admet un moment d'ordre 1. De même dans le dernier cadre on sait décrire le bord de Poisson lorsque le sous-groupe  $\Gamma$  n'est pas Zariski-dense : c'est un quotient de  $G/P$ ; mais pour ne pas alourdir le propos, on supposera cette hypothèse vérifiée.*

Dans certains cas particuliers comme les groupes libres finiment engendrés, on peut décrire le bord hyperbolique comme un ensemble de mots infinis. On peut alors, pour une marche aléatoire aux proches voisins, décrire la mesure harmonique de manière explicite ([DM61]) ou montrer des propriétés de mesure de Gibbs de cette mesure ([Led01]). C'est le cas également pour les produits libres de groupes finis ([MM04]). Cette approche sera celle du Chapitre 3. Pour une marche aléatoire sur  $SL(2, \mathbb{R})$  un exemple de description explicite est fourni dans [CLM84].

Dans un cadre plus général, une telle approche n'est plus possible. On peut cependant décrire certains aspects de la mesure harmonique. Son support est, sous les hypothèses faites précédemment, l'ensemble limite (notion à préciser selon le cadre) associé au groupe  $\Gamma$  engendré par le support de  $\mu$ . En utilisant juste sa propriété de  $\mu$ -stationnarité, on montre qu'elle n'a pas d'atome. Soulignons que la dimension

de la mesure précise en quelque sorte ces caractéristiques. En effet la dimension ponctuelle d'une mesure  $\nu$  en un point  $x$ , notée  $\dim_P \nu(x)$ , est définie comme la limite, lorsqu'elle existe (sinon on regarde les limites inférieure et supérieure, voir Appendice) de la quantité

$$\frac{\log \nu B(x, \epsilon)}{\log \epsilon}$$

lorsque  $\epsilon$  tend vers 0. Elle mesure donc la vitesse de décroissance de la mesure des boules lorsque leur diamètre tend vers 0. Une mesure atomique est de dimension nulle, tandis que sur une variété, une mesure lisse est de dimension maximale.

**Remarque.** *On utilisera plusieurs définitions de la dimension d'une mesure, ces définitions donnant des quantités égales sous certaines conditions. En particulier, on peut également définir la dimension d'une mesure de probabilité  $\nu$  comme la dimension de Hausdorff minimale d'un ensemble de mesure 1, on la note alors  $\dim_H \nu$ .*

On a la relation importante suivante entre l'entropie asymptotique  $h$  et la vitesse de fuite  $l$  ([Gui80]) :

$$h \leq lv ; \tag{1}$$

$v$  désignant la croissance des orbites du groupe  $\Gamma$  dans l'espace métrique  $(X, d)$  dans lequel on a défini la vitesse de fuite. Une question naturelle est alors celle de l'existence d'une mesure  $\mu$  telle que l'on ait égalité dans l'inégalité (1), ou du moins telle que l'on s'en rapproche autant que voulu. Lorsque l'on se fixe un ensemble de générateurs comme support de  $\mu$ , ce problème est appelé dans [Ver00] problème d'extrémalité de ce système de générateurs. On peut le reformuler de manière plus informelle de la façon suivante : l'ensemble générateur en question engendre-t-il de manière optimale, d'un point de vue statistique, le groupe  $\Gamma$  ? Ce problème est abordé dans le Chapitre 3 dans le cadre des produits libres de groupes finis.

Dans certains cadres, on a une relation entre la dimension de la mesure harmonique,  $h$  et  $l$  ([Led84] pour  $SL(2, \mathbb{R})$ , [Led01] et [Kai98] pour les arbres) du type

$$\dim \nu = \frac{h}{l} ; \tag{2}$$

la notion de dimension étant à préciser selon le cadre. La dimension du support de la mesure harmonique coïncidant dans certains cas avec la croissance  $v$  intervenant dans (1), l'équation (2) montre que le problème de l'égalité dans (1) est relié à celui de la maximalité de la dimension de la mesure harmonique, et plus généralement à celui de son type. Ce problème du type de la mesure harmonique a été abordé dans d'autres cadres, par exemple celui de la dynamique complexe ([PUZ89]). On l'aborde ici dans le cadre des groupes hyperboliques (Chapitre 2) et dans celui des sous-groupes discrets des groupes de Lie semi-simples (Chapitres 4 et 5).

Dans le cas d'une marche aléatoire sur  $G = SL(d, \mathbb{R})$ , on sait que si la mesure  $\mu$  définissant la marche aléatoire contient dans son support un voisinage de l'élément neutre, alors la mesure  $\mu$ -stationnaire sur l'espace des drapeaux  $G/P$  est équivalente à la mesure de Haar. On va s'intéresser au cas des sous-groupes discrets de



$G$ . Un des premiers résultats de singularité dans ce cadre est celui concernant les fractions continues ([Cha66]) ; la distribution de ces fractions, avec des coefficients indépendants, peut en effet être vue comme la distribution limite d'une marche aléatoire sur  $SL(2, \mathbb{Z})$ . Toujours dans ce cadre, il est démontré dans [KPW01] que non seulement la distribution des fractions continues avec coefficients indépendants est singulière, mais que sa dimension est majorée uniformément par une constante strictement plus petite que 1. On s'intéressera plutôt ici au rang supérieur. Dans ce cadre, Furstenberg a montré ([Fur71]) que l'on pouvait construire sur tout réseau  $\Gamma$  de  $G$  une mesure  $\mu$  admettant un moment d'ordre 1 telle que la mesure harmonique  $\nu$  soit lisse. Un des principaux buts de cette thèse est de montrer que ce n'est pas toujours le cas : on peut construire sur tout réseau une mesure telle que la mesure harmonique associée ne soit pas lisse (Théorème 5.1).

Citons quelques sujets reliés au caractère lisse (ou non) de la mesure harmonique pour une marche sur  $SL(d, \mathbb{R})$ . Dans [Fur98], une propriété de rigidité ("stiffness") de l'action du réseau  $SL(d, \mathbb{Z})$  est étudiée. Afin de prouver cette propriété pour l'action de  $SL(d, \mathbb{Z})$  sur le tore  $\mathbb{T}^d$ , l'auteur doit se restreindre au cas où la mesure harmonique est lisse. Un autre sujet est celui des mesures invariantes pour le flot des chambres de Weil. Dans [Kai90], il est démontré qu'en rang 1, on sait construire à partir de la mesure harmonique (ou plutôt de son carré) une mesure invariante par le flot géodésique sur la surface  $G/\Gamma$ . Dans [KS96], il est démontré qu'en rang supérieur, pour un réseau  $\Gamma$ , les mesures invariantes pour le flot des chambres de Weil sur  $G/\Gamma$  doivent, sous certaines hypothèses, vérifier des conditions d'absolue continuité par rapport à la mesure de Haar. On peut donc envisager que la singularité de la mesure harmonique soit un obstacle à une construction similaire à celle du rang 1.

Une autre question naturelle, que l'on n'abordera pas, est celle de la positivité de la dimension de Hausdorff de la mesure harmonique. Dans [KL90], un résultat de ce type est prouvé dans le cas du mouvement brownien sur une variété riemannienne à courbure négative pincée. Dans [Gui90], cette propriété est démontrée dans le cas des sous-groupes discrets de  $SL(d, \mathbb{R})$  sous des hypothèses de moment exponentiel. Remarquons que, sous les hypothèses que l'on fera, la frontière de Poisson n'est pas triviale. Or sa trivialité est équivalente au fait que  $h$  est nulle ([KV83], [Der80]). Ainsi dans le cas des arbres, la formule  $\dim \nu = h/l$  implique que la dimension de  $\nu$  est strictement positive.

Décrivons maintenant plus précisément les résultats démontrés. Dans le Chapitre 2,  $\Gamma$  est un sous-groupe discret non-élémentaire du groupe des isométries d'un espace hyperbolique  $X$ ,  $\mu$  une probabilité dont le support engendre  $\Gamma$  admettant un moment d'ordre 1. On étend partiellement l'égalité  $\dim \nu = h/l$  au cas général. Le bord  $\partial X$  étant muni d'une distance  $d_a$  paramétrée par le réel  $a$ , on a la relation suivante :

**Théorème 2.1** *Pour  $\nu$ -presque tout  $\xi$ ,*

$$\overline{\dim}_P \nu(\xi) \leq \frac{1}{\log a} \frac{h}{l} .$$

On construit ensuite des mesures  $\mu$  telles que le rapport  $h(\Gamma, \mu)/l(\Gamma, \mu)$  soit aussi petit que voulu. Et on se sert de la majoration de la proposition qui précède pour construire des mesures harmoniques de dimension petite :

**Théorème 2.2** *Soit  $(X, d)$  un espace hyperbolique. Soit  $\Gamma$  un sous-groupe d'isométries agissant proprement discontinument sur  $X$ , non élémentaire. Alors quel que soit  $\epsilon > 0$  il existe sur  $\Gamma$  une mesure de probabilité  $\mu$  symétrique admettant un moment d'ordre 1, dont le support engendre  $\Gamma$ , et qui a la propriété suivante : la dimension ponctuelle de la mesure harmonique associée à la marche aléatoire  $(\Gamma, \mu)$  est  $\nu$ -presque sûrement plus petite que  $\epsilon$ . Si de plus  $\Gamma$  est finiment engendré, on peut prendre  $\mu$  à support fini.*

Ce théorème conduit, dans les cas où la mesure de Hausdorff sur l'ensemble limite de  $\Gamma$  est finie et non nulle (par exemple le cas des groupes hyperboliques) à montrer l'existence de mesures harmoniques singulières par rapport à cette mesure de Hausdorff (Corollaire 2.5.1).

Dans le Chapitre 3, on se place dans le cadre d'un produit libre de  $q$  groupes finis. On aborde le problème de l'extrémalité des systèmes de générateurs et plus précisément la question suivante : étant donné un système de générateurs  $S$ , existe-t-il une mesure  $\mu$  de support  $S$  telle que la mesure harmonique associée soit de dimension maximale, c'est à dire telle que  $h = lv$ . On se base sur l'expression dans [MM04] de la mesure harmonique dans ce cadre. La méthode utilisée est de se ramener à utiliser le principe variationnel classique de la dynamique symbolique, le fait que la mesure harmonique soit de dimension maximale étant relié au fait qu'une mesure associée soit d'entropie maximale (Proposition 3.4.1). Dans le cas où le système de générateurs est la réunion  $\Sigma$  des groupes constituant le produit libre privée de l'élément neutre, on obtient le résultat suivant, qui précise le résultat d'existence contenu dans [MM04].

**Théorème 3.1** *Lorsque le nombre  $q$  de groupes constituant le produit libre est supérieur ou égal à 3, il existe une unique mesure  $\mu$  de support  $\Sigma$  telle que l'on ait l'égalité  $h = lv$ .*

Soulignons que, bien que les produits libres de groupes finis soient un cas particulier de groupe hyperbolique, les techniques employées dans ce chapitre (on se base sur l'identification du bord hyperbolique à un ensemble de mots infinis) sont différentes de celles, géométriques, employées dans le précédent.

Les Chapitres 4 et 5 concernent les marches aléatoires sur les groupes semi-simples et leur but principal est de montrer le théorème suivant :

**Théorème 5.1** *Soit  $\Gamma$  un sous-groupe discret Zariski-dense de  $SL(d, \mathbb{R})$ . Il existe sur  $\Gamma$  une mesure  $\mu$  symétrique dont le support engendre  $\Gamma$  et admettant un moment d'ordre 1 telle que la mesure harmonique associée  $\nu$  soit singulière par rapport au type de mesure lisse sur l'espace des drapeaux complets. De plus si  $\Gamma$  est finiment engendré,  $\mu$  peut être choisie à support fini.*

Décrivons les étapes de la démonstration de ce théorème. On connaît dans le cas de

$SL(2, \mathbb{R})$  un résultat reliant la dimension de  $\nu$  à  $h$  et à l'exposant de Liapunov  $\lambda$  de la marche ([Led83]) : on a une convergence en probabilité, lorsque  $\epsilon$  tend vers 0 :

$$\frac{\log \nu B(x, \epsilon)}{\log \epsilon} \rightarrow \frac{h}{2\lambda} .$$

Dans le Chapitre 4, on étend partiellement ce résultat au rang supérieur en utilisant les représentations usuelles de  $SL(d, \mathbb{R})$ . En notant  $(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$  le vecteur des exposants de Liapunov de la marche,  $P_i$  le sous-groupe parabolique maximal tel que  $G/P_i$  soit l'ensemble des drapeaux homogènes de rang  $i$ , et  $\nu^i$  la projection de  $\nu$  sur  $G/P_i$ , on montre :

**Théorème 4.1** *Sous les hypothèses précédentes, on a*

$$\overline{\dim}_B(\nu^i) \leq \frac{h}{\lambda_{d-i} - \lambda_{d-i+1}} .$$

Ensuite dans le Chapitre 5, on construit une suite de mesures  $(\mu_k)$  telle que  $(h(\mu_k))_k$  reste bornée tandis que pour un certain  $i$ ,  $(\lambda_{d-i} - \lambda_{d-i+1})(\mu_k)$  est aussi grand que l'on veut. Notons  $\nu_k$  la mesure harmonique associée à  $\mu_k$ . Le théorème précédent entraîne alors que pour un certain  $i$ , si  $k$  est assez grand, la projection  $\nu_k^i$  de  $\nu_k$  sur  $G/P_i$  est de dimension strictement inférieure à celle de la variété  $G/P_i$  qui la porte. Donc  $\nu_k^i$  est singulière par rapport au type de mesure lisse. On en conclut que  $\nu_k$  elle-même est singulière.

On étend également ces résultats à des groupes semi-simples plus généraux (Théorème 4.2 et Théorème 5.2).

# Chapitre 1

## Marche aléatoire et quantités asymptotiques

On présente ici quelques définitions et propriétés concernant les marches aléatoires dont nous aurons besoin pour la suite.

### 1.1 Définition

On se donne un groupe  $\Gamma$  dénombrable ainsi qu'une mesure de probabilité  $\mu$  sur  $\Gamma$ . On définit alors la marche aléatoire associée  $\mathbf{x} = (x_n)_{n \geq 0}$  de la manière suivante :  $(h_n)_{n \geq 1}$  est une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi  $\mu$  ; on pose  $x_0 = e$  et, pour  $n \geq 1$ ,  $x_n = h_1 \cdots h_n$ . La suite  $(h_n)_{n \geq 1}$  est appelée suite des accroissements et  $(x_n)$  celle des trajectoires. Il s'agit d'une chaîne de Markov homogène. L'opérateur associé est  $P$  :

$$Pf(x) = \sum_{g \in \Gamma} \mu(g) f(xg) .$$

On note  $\mathbb{P}$  la loi de  $\mathbf{x}$  et  $T$  le décalage dans  $\Gamma^{\mathbb{N}}$ . La loi de la suite des accroissements dans  $\Gamma^{\mathbb{N}}$  est  $\mu^{\otimes \mathbb{N}}$  ; elle est invariante sous  $T$ . Au décalage dans l'espace des accroissements on fait correspondre une transformation  $U$  de l'espace des trajectoires : si  $x_n = h_1 \cdots h_n$ ,  $(U\mathbf{x})_n = h_2 \cdots h_{n+1}$  ; c'est à dire

$$(U\mathbf{x})_n = x_1^{-1} \mathbf{x}_{n+1} .$$

Cette transformation  $U$  préserve la mesure  $\mathbb{P}$ .

On étend la marche aléatoire  $(x_n)_{n \geq 0}$  en une marche bilatère de la manière suivante :  $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi  $\mu$  ; pour  $n \geq 0$ , on ne change pas la procédure et pour  $n < 0$ , on pose  $x_n = h_0^{-1} h_{-1}^{-1} \cdots h_{n+1}^{-1}$ . La relation  $x_{n+1} = x_n h_{n+1}$  reste vraie pour tout  $n$  dans  $\mathbb{Z}$ . On étend également la mesure  $\mathbb{P}$  ainsi que les transformations  $T$  et  $U$ . On note  $\check{\mu}$  la mesure définie par  $\check{\mu}(g) = \mu(g^{-1})$ . La suite  $(x_{-n})_{n \geq 0}$  est la marche aléatoire associée à la mesure  $\check{\mu}$  ; on la note  $(\check{x}_n)$  .

## 1.2 Frontière de Poisson

On considère la relation d'équivalence suivante sur l'espace des trajectoires :

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{x}' \Leftrightarrow \exists k, k' \geq 0 : T^k \mathbf{x} = T^{k'} \mathbf{x}' .$$

Notons  $\mathcal{A}_T$  la tribu constituée par les unions mesurables de  $\sim$ -classes (mod 0), c'est à dire la tribu des ensembles  $T$ -invariants (mod 0). Comme  $(\Gamma^{\mathbb{N}}, \mathbb{P})$  est un espace de Lebesgue, il existe un unique (à isomorphisme près) espace mesurable  $(\mathcal{B}, \mathcal{T})$  (l'espace des composants ergodiques) et une unique application  $bnd : \Gamma^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{B}$  telle que  $\mathcal{A}_T = bnd^{-1}(\mathcal{T})$ .

**Définition 1.2.1.** ([KV83] pour cette présentation, voir aussi [Fur73]) On appelle mesure harmonique l'image  $\nu$  de  $\mathbb{P}$  par  $bnd$ . L'espace  $(\mathcal{B}, \nu)$  est appelé frontière de Poisson de la marche aléatoire  $(\Gamma, \mu)$ .

L'action (coordonnée par coordonnée) de  $\Gamma$  sur  $\Gamma^{\mathbb{N}}$  commute avec  $T$  ; ainsi elle induit une action de  $\Gamma$  sur  $\mathcal{B}$  ; et  $bnd$  est  $\Gamma$  équivariante, c'est à dire quels que soient  $g$  et  $\mathbf{x}$ ,  $bnd(g\mathbf{x}) = gbnd(\mathbf{x})$ .

Rappelons que si  $\Gamma$ , muni d'une mesure  $\mu$ , agit sur un espace  $Y$  muni d'une mesure  $m$ , on définit la convolée de  $m$  par  $\mu$  de la façon suivante : pour toute fonction  $f$ ,

$$\int_Y f(y) d(\mu * m)(y) = \int_{\Gamma \times Y} f(gy) d\mu(g) dm(y) ;$$

autrement dit, lorsque  $\Gamma$  est dénombrable,

$$\mu * m = \sum_{g \in \Gamma} \mu(g) gm ;$$

$gm$  étant la mesure définie par  $gm(A) = m(g^{-1}A)$ .

**Proposition 1.2.1.** La mesure harmonique  $\nu$  est  $\mu$ -stationnaire, c'est à dire

$$\mu * \nu = \nu .$$

*Démonstration.* On part du fait que  $T\mathbb{P} = \mu * \mathbb{P}$ . Or, vue la définition de la frontière,  $bnd(T\mathbb{P}) = bnd(\mathbb{P})$ . Ainsi  $bnd(\mathbb{P}) = bnd(\mu * \mathbb{P})$  et comme  $bnd$  est  $\Gamma$ -équivariante,  $bnd(\mathbb{P}) = \mu * bnd(\mathbb{P})$ .  $\square$

On dit qu'une fonction  $f$  sur  $\Gamma$  est  $\mu$ -harmonique si elle vérifie  $Pf = f$  et on note  $H^\infty(\Gamma, \mu)$  l'ensemble des fonctions harmoniques bornées. La proposition suivante justifie le nom de "frontière de Poisson" ([Fur63], voir [Kai00]) :

**Proposition 1.2.2.** Avec les notations précédentes, les formules

$$F(bnd(\mathbf{x})) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) , \quad f(g) = \int_{\mathcal{B}} F(\xi) dg\nu(\xi)$$

établissent un isomorphisme isométrique entre  $H^\infty(\Gamma, \mu)$  et  $L^\infty(\mathcal{B}, \nu)$ .

Dans les cadres qui nous intéressent (groupes hyperboliques et sous-groupes discrets des groupes semi-simples), la frontière de Poisson a été décrite explicitement (voir les parties 2.1.5 et 4.1.3). C'est de ces descriptions que l'on va se servir pour aborder les problèmes de dimension et non pas de la définition de la mesure harmonique telle qu'elle est présentée ci-dessus.

## 1.3 Quantités asymptotiques

**Définition 1.3.1.** *On suppose que le groupe  $\Gamma$  que l'on s'est donné agit par isométries sur un espace métrique  $(X, d)$ . On suppose fixé un point  $o$  de  $X$ . On définit alors la jauge  $|\cdot|$  associée à cette action en posant  $|g| = d(o, go)$ .*

Remarquons que cette définition recouvre le cas d'un groupe finiment engendré agissant sur son graphe de Cayley (vis à vis d'un système symétrique de générateurs  $S$ ) et que dans ce cas, le point de base étant l'élément neutre,  $|\cdot|$  correspond à la métrique des mots associée à  $S$ .

On se fixe pour la suite de cette section un tel espace métrique  $(X, d)$ . On suppose également que  $\mu$  possède un moment d'ordre 1 vis à vis de la jauge induite, c'est à dire :

$$L(\mu) := \sum_{g \in \Gamma} \mu(g)|g| = \int_{\Gamma} d(o, go) d\mu(g) < +\infty .$$

On note  $\mu^n$  la loi de la position de la marche au temps  $n$ , c'est à dire la convolée  $n^{\text{ème}}$  de  $\mu$ . La suite  $(L(\mu^n))_n$  est sous additive ; en effet, en utilisant le fait que  $\mu^n$  est la loi de  $x_n$ , on a

$$\begin{aligned} L(\mu^{n+m}) &= \int_{\Gamma^{\mathbb{N}}} d(o, x_{n+m}o) d\mathbb{P}(\mathbf{x}) \\ &\leq \int_{\Gamma^{\mathbb{N}}} (d(o, x_n o) + d(x_n o, x_m o)) d\mathbb{P}(\mathbf{x}) \\ &\leq \int_{\Gamma^{\mathbb{N}}} (d(o, x_n o) + d(o, x_n^{-1} x_m o)) d\mathbb{P}(\mathbf{x}) \\ &\leq \int_{\Gamma^{\mathbb{N}}} (d(o, x_n o) + d(o, (U^n \mathbf{x})_m o)) d\mathbb{P}(\mathbf{x}) . \end{aligned}$$

Et comme  $U$  préserve  $\mathbb{P}$ , on obtient

$$L(\mu^{n+m}) \leq L(\mu^n) + L(\mu^m) .$$

On peut alors définir la vitesse de fuite de la marche :

**Définition 1.3.2.** *On appelle vitesse de fuite de la marche aléatoire  $(x_n)_{n \geq 0}$  la quantité*

$$l(\Gamma, \mu) = \lim_n \frac{1}{n} L(\mu^n) .$$

Remarquons que l'on a en fait utilisé une inégalité vérifiée par chaque trajectoire : en notant  $f_n(\mathbf{x}) = d(o, x_n o)$ ,

$$f_{n+m}(\mathbf{x}) \leq f_n(\mathbf{x}) + f_m \circ U^n(\mathbf{x}) .$$

En utilisant le théorème ergodique sous-additif de Kingman, on obtient alors, en plus de la convergence  $L^1$  utilisée dans la définition, une convergence  $\mathbb{P}$ -presque sûre :

$$\frac{1}{n} d(o, x_n o) \longrightarrow l(\Gamma, \mu) .$$

Par ailleurs, le fait que  $\mu$  possède un moment d'ordre 1 entraîne que  $\mu$  a une entropie  $H(\mu) := \sum_g -\mu(g) \log(\mu(g))$  finie ([Der86]), et on peut définir de la même manière l'entropie asymptotique :

**Définition 1.3.3.** *On appelle entropie asymptotique de la marche aléatoire  $(x_n)_{n \geq 0}$  la quantité*

$$h(\Gamma, \mu) = \lim_n \frac{1}{n} H(\mu^n) .$$

En remarquant que

$$H(\mu^n) = - \int \log(\mu^n(x_n)) d\mathbb{P} .$$

et en utilisant le théorème ergodique sous-additif de Kingman, on obtient ([Der80]) également une convergence  $\mathbb{P}$ -presque sûre

$$-\frac{1}{n} \log(\mu^n(x_n)) \longrightarrow h(\Gamma, \mu) .$$

S'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera  $h$  et  $l$  ces deux quantités.

Le théorème suivant établit un lien important entre le bord de Poisson et l'entropie asymptotique :

**Théorème 1.3.1.** *([KV83], [Der80]) Soit  $\Gamma$  un groupe dénombrable et soit  $\mu$  une mesure de probabilité sur  $\Gamma$ . On suppose que  $\mu$  a une entropie finie. Alors la frontière de Poisson associée à la marche aléatoire  $(x_n)$  définie par  $\mu$  est triviale si et seulement si  $h = 0$ .*

La croissance  $v(\Gamma)$  du groupe  $\Gamma$  (ou plutôt de ses orbites dans  $(X, d)$ ) est définie de la manière suivante :

$$v(\Gamma) = \limsup_{R \rightarrow \infty} \frac{\log \text{card}\{g \in \Gamma : d(o, go) \leq R\}}{R} .$$

Cette définition recouvre bien sûr celle de la croissance d'un groupe finiment engendré muni de la métrique des mots.

Comme on l'a souligné dans l'introduction, la relation  $h \leq lv$  (voir [Ver00] pour une démonstration) est fortement liée aux problèmes de dimension de la mesure harmonique que l'on va traiter.

## 1.4 $\mu$ -frontières

Supposons que  $\Gamma$  soit plongé de manière équivariante dans un espace topologique  $X$ , et que l'image de presque toute trajectoire  $\mathbf{x} = (x_n)$  de la marche aléatoire converge vers une limite  $\pi(\mathbf{x})$ . Alors l'application  $\pi$  est  $T$ -invariante, de sorte que  $X$  muni de  $\pi(\mathbb{P})$  est un quotient de la frontière de Poisson par rapport à une certaine partition  $\Gamma$ -invariante. Un tel quotient est appelé  $\mu$ -frontière. La frontière de Poisson est alors la  $\mu$ -frontière maximale. Une notion similaire a été introduite dans [Fur73].

On note toujours  $(B, \nu)$  la frontière de Poisson. Une formule relie l'entropie asymptotique de la marche aléatoire et les déviations de Kullback-Leibler de la mesure harmonique ([KV83]) :

$$h = - \sum_{g \in \Gamma} \mu(g) \int_B \log \frac{dg^{-1}\nu}{d\nu}(b) d\nu(b) . \quad (1.1)$$

Par analogie, on peut regarder des quantités similaires sur chaque  $\mu$ -frontière  $X$  (en fait introduite avant que la formule précédente ne soit connue, voir [Fur73]) :

$$h_\mu = - \sum_{g \in \Gamma} \mu(g) \int_X \log \frac{dg^{-1}\lambda}{d\lambda}(b) d\lambda(b) . \quad (1.2)$$

On sera amené à ne pas considérer uniquement l'entropie asymptotique, mais aussi ces quantités, définies pour des quotients de la frontière de Poisson.





# Chapitre 2

## Singularité de la mesure harmonique sur le bord d'un groupe hyperbolique

On s'intéresse ici aux marches aléatoires sur les sous-groupes d'isométries d'un espace  $(X, d)$   $\delta$ -hyperbolique au sens de Gromov. Notre objectif principal est de construire des mesures harmoniques de petite dimension sur le bord d'un groupe hyperbolique.

La première section est consacrée à des préliminaires sur les espaces hyperboliques et leur frontière de Poisson. Ensuite on établit dans la section 2.3 un lien entre la dimension de la mesure harmonique et les quantités asymptotiques associées à la marche (vitesse de fuite  $l$  et entropie asymptotique  $h$ ) du type :  $\dim \nu \leq h/l$ . Afin de construire des mesures harmoniques de dimension aussi petite que voulue, on introduit dans la section 2.4 une suite de marches aléatoires dont l'entropie asymptotique reste bornée tandis que leur vitesse de fuite tend vers l'infini. Vue la relation établie entre la dimension,  $h$  et  $l$ , ceci nous permet de conclure dans la section 2.5.

### 2.1 Préliminaires et notations

On rappelle ici la base de la théorie des espaces hyperboliques au sens de Gromov ainsi que certaines propriétés dont on aura besoin. Les sources principales sont [CDP90] et [GdlH90].

#### 2.1.1 Espaces hyperboliques

Soit  $(X, d)$  un espace métrique et  $o$  un point de  $X$ . On définit le produit de Gromov relativement à  $o$  sur  $X^2$  :

$$(x|y)_o = \frac{1}{2}[d(o, x) + d(o, y) - d(x, y)] .$$

Rappelons qu'on appelle géodésique (resp. rayon géodésique, resp. segment géodésique) de  $X$  toute isométrie de  $\mathbb{R}$  (resp.  $[0, \infty[$ , resp.  $[a, b]$ ) dans  $X$ , ainsi que l'image d'une telle isométrie. On dit que l'espace métrique  $(X, d)$  est géodésique si deux points quelconque de  $X$  peuvent être reliés par une géodésique. On dit qu'un espace topologique est propre lorsque les boules fermées sont compactes.

**Définition 2.1.1.** *Un espace métrique géodésique et propre  $(X, d)$  est dit  $\delta$ -hyperbolique si le produit de Gromov sur  $X$  vérifie : quels que soient  $o, x, y, z$  dans  $X$ ,*

$$(x|z)_o \geq \min\{(x|y)_o, (y|z)_o\} - \delta . \quad (2.1)$$

*On dit que  $(X, d)$  est hyperbolique s'il existe  $\delta$  tel que  $X$  soit  $\delta$ -hyperbolique.*

**Exemples :** Les arbres réels (0-hyperboliques), le demi-plan de Poincaré  $\mathbb{H}^2$ .

Une autre classe d'exemples importants est celle des groupes hyperboliques : on considère un groupe  $\Gamma$  finiment engendré et on se donne un système fini  $S$  de générateurs. Le graphe de Cayley de  $\Gamma$  est le graphe (non-orienté) dont les sommets sont les éléments de  $\Gamma$  et dans lequel deux sommets  $x$  et  $y$  sont reliés par une arête lorsque  $x^{-1}y$  appartient à  $S \cup S^{-1}$ . On munit ce graphe d'une métrique en imposant que chaque arête soit isométrique au segment  $[0, 1]$ . En restriction à  $\Gamma$ , cette métrique est celle des mots :  $d(x, y) = |x^{-1}y|$ , où  $|\cdot|$  est définie sur  $\Gamma$  par

$$|g| = \inf\{k \geq 0 : \exists s_1, \dots, s_k \in S \cup S^{-1}, g = s_1 \cdots s_k\} .$$

Bien sûr cette métrique dépend du choix de  $S$ ; mais pas le fait que le graphe de Cayley de  $\Gamma$  muni de cette métrique est hyperbolique. Dans ce cas, on dit que  $\Gamma$  est un groupe hyperbolique. Remarquons que le groupe  $\Gamma$  agit (par translations à gauche) de manière isométrique sur son graphe de Cayley.

On se donne pour la suite un espace  $\delta$ -hyperbolique  $(X, d)$  dans lequel on fixe un point  $o$ .

## 2.1.2 Bord hyperbolique

On dit qu'une suite  $(x_n)$  d'éléments de  $X$  converge à l'infini lorsque le produit de Gromov  $(x_n|x_m)$  tend vers l'infini lorsque  $n$  et  $m$  tendent vers l'infini (cette définition, ainsi que celles qui suivent, ne dépendent pas du point  $o$  choisi). Parmi les suites ayant cette propriété, on dit que deux suites  $(x_n)$  et  $(y_n)$  sont équivalentes lorsque  $(x_n|y_m)$  tend vers l'infini lorsque  $n$  et  $m$  tendent vers l'infini. On définit le bord hyperbolique  $\partial X$  de  $X$  comme le quotient de l'ensemble des suites convergeant à l'infini par cette relation d'équivalence. Si un élément  $\xi$  de  $\partial X$  est la classe de  $(x_n)$ , on dit que  $(x_n)$  converge vers  $\xi$ .

On prolonge le produit de Gromov à  $X \cup \partial X$  en posant, pour  $x, y$  dans  $\partial X$ ,

$$(x|y) = \inf\{\liminf_n (x_n|y_n)\} ; \quad (2.2)$$

la borne inférieure étant prise sur l'ensemble des suites  $(x_n)$  et  $(y_n)$  qui convergent respectivement vers  $x$  et  $y$ . La relation (2.1) reste vérifiée. On a de plus (voir [GdlH90]), si  $(x_n)$  converge vers  $x$  et  $(y_n)$  vers  $y$ ,

$$(x|y) \leq \liminf_n (x_n|y_n) \leq (x|y) + 2\delta . \quad (2.3)$$

Une suite  $(x_n)$  converge alors vers un élément  $\xi$  de  $\partial X$  si et seulement si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\xi|x_n) = +\infty .$$

On munit alors  $X \cup \partial X$  d'une topologie compatible avec celle de  $X$  en prenant pour chaque point  $\xi$  de  $\partial X$  comme base de voisinages les ensembles, pour  $R > 0$ ,

$$\{x \in X \cup \partial X : (\xi|x) > R\}.$$

On peut définir le bord hyperbolique d'une autre manière. Si  $h_1$  et  $h_2$  sont deux rayons géodésiques, on dit qu'il sont équivalents ( $h_1 \sim h_2$ ) s'il existe une constante  $D$  telle que pour tout  $t$ ,  $d(h_1(t), h_2(t)) \leq D$ . Le quotient de l'ensemble des rayons géodésiques par cette relation d'équivalence est le bord défini précédemment. Si  $\xi \in \partial X$  est la classe d'un rayon  $h$ , on a bien, si  $(t_n)$  est une suite qui tend vers l'infini,  $\lim_{n \rightarrow \infty} h(t_n) = \xi$  et on écrit  $h(+\infty) = \xi$ . De même à une géodésique  $\gamma$  sont associés deux point du bord :  $\gamma(+\infty)$  et  $\gamma(-\infty)$ .

Remarquons enfin que l'action du groupe d'isométrie de  $X$  se prolonge en une action continue sur le bord.

### 2.1.3 Métrique sur le bord

Dans le cas d'un arbre, on peut définir une métrique sur le bord en posant, pour  $\xi_1$  et  $\xi_2$  dans  $\partial X$ ,

$$\text{dist}(\xi_1, \xi_2) = e^{-(\xi_1|\xi_2)}.$$

Dans un espace hyperbolique général, cette formule ne définit pas une distance, mais on peut effectuer une construction qui s'en rapproche. Pour  $a > 1$ , on définit la  $a$ -longueur d'un chemin continu de  $X$  comme étant l'intégrale le long de ce chemin de la fonction  $a^{-d(o,x)}$ . Puis on définit la  $a$ -distance entre deux points  $x$  et  $y$  de  $X$  comme la borne inférieure des  $a$ -longueurs des chemins joignant  $x$  à  $y$ . On montre (voir [CDP90]) qu'il existe une constante  $a_0 > 1$  (qui ne dépend que de  $\delta$ ) telle que si  $1 < a < a_0$ , alors le complété de  $X$  pour la  $a$ -distance  $d_a$  construite ci-dessus soit  $X \cup \partial X$  et telle que la métrique ainsi définie sur  $X \cup \partial X$  induise la même topologie que celle définie précédemment.

On fixe un tel  $a$  pour la suite. On aura besoin de la propriété suivante, qui montre l'analogie entre  $d_a$  et la distance définie pour les arbres (voir [CDP90]).

**Proposition 2.1.1.** *Il existe une constante  $\lambda > 0$  telle que*

- $\forall x, y \in X \cup \partial X, d_a(x, y) \leq \lambda a^{-(x|y)};$
- $\forall x, y \in \partial X, d_a(x, y) \geq \lambda^{-1} a^{-(x|y)}.$

### 2.1.4 Ensemble limite associé à un sous-groupe d'isométries

On se donne un sous groupe  $\Gamma$  du groupe des isométries de  $(X, d)$  qui agit de manière proprement discontinue. La référence pour cette partie est [Coo90].

**Définition 2.1.2.** *L'ensemble des points d'accumulation dans  $\partial X$  de l'orbite d'un point  $x$  de  $X$  sous  $\Gamma$  ne dépend pas de ce point  $x$ . On l'appelle l'ensemble limite du groupe  $\Gamma$  et on le note  $\Lambda_\Gamma$ .*

Cet ensemble limite est destiné à être le support de la mesure harmonique (voir la partie 2.1.5); c'est pourquoi on a besoin, pour étudier celle-ci, de connaître un certain nombre de ses propriétés.

**Définition 2.1.3.** *Le groupe  $\Gamma$  est dit élémentaire si le cardinal de  $\Lambda_\Gamma$  est inférieur ou égal à 2.*

Si  $\Gamma$  est non-élémentaire, on montre que  $\Lambda_\Gamma$  est non-dénombrable.

**Définition 2.1.4.** *Soit  $g$  une isométrie de  $X$ . On dit que  $g$  est de type hyperbolique si  $(g^n o)_{n \in \mathbb{Z}}$  est une quasi-géodésique ; c'est à dire s'il existe des constantes  $\lambda$  et  $c$  telles que quels que soient  $n$  et  $m$  dans  $\mathbb{Z}$ ,*

$$\lambda^{-1}|n - m| - c \leq d(g^n o, g^m o) \leq \lambda|n - m| + c .$$

**Proposition 2.1.2.** *([Coo90]) Soit  $\eta$  une  $(\lambda, c)$ -quasi-géodésique. Alors  $\eta(t)$  admet des limites  $\eta(\pm\infty)$  lorsque  $t$  tend vers  $\pm\infty$ . Si  $\sigma$  est une géodésique telle que  $\sigma(\pm\infty) = \eta(\pm\infty)$ , alors les images de  $\sigma$  et  $\eta$  se trouvent à une distance de Hausdorff finie  $K$  l'une de l'autre,  $K$  ne dépendant que de  $\lambda$ ,  $c$  et  $\delta$ .*

En particulier si une isométrie  $g$  est de type hyperbolique, alors il existe  $g^+$  et  $g^-$  dans  $\partial X$  tels que  $(g^n o)$  tende vers  $g^+$  et  $g^-$  lorsque  $n$  tend respectivement vers plus ou moins l'infini. En fait quel que soit  $x$  dans  $X$ , les suites  $(g^n x)$  convergent vers les même limites. Les points  $g^+$  et  $g^-$  sont des points fixes pour  $g$ , qui sont dits respectivement attractif et répulsif.

**Proposition 2.1.3.** *([Coo90]) Un groupe non-élémentaire contient des éléments hyperboliques.*

Dans [Coo90] sont démontrées également des propriétés de minimalité de l'ensemble limite :

**Proposition 2.1.4.** *Supposons  $\Gamma$  non-élémentaire. Alors tout compact non vide  $\Gamma$ -invariant de  $\partial X$  contient  $\Lambda_\Gamma$ .*

Ceci a pour conséquence :

**Proposition 2.1.5.** *Supposons  $\Gamma$  non-élémentaire. Soit  $U$  un ouvert de  $\partial X$  qui rencontre  $\Lambda_\Gamma$ . Alors on a*

$$\partial X = \bigcup_{g \in \Gamma} gU ;$$

et même : il existe un nombre fini d'éléments  $g_1, \dots, g_r$  de  $\Gamma$  tels que

$$\Lambda_\Gamma \subset \bigcup_{1 \leq i \leq r} g_i U . \quad (2.4)$$

On va par la suite étudier la dimension de la mesure harmonique. Il est donc intéressant de connaître la dimension de son support  $\Lambda_\Gamma$ . On définit la croissance de base  $a$  de  $\Gamma$  :

$$v_a(\Gamma) = \limsup_{R \rightarrow \infty} \frac{\log_a \text{card}\{g \in \Gamma : d(o, go) \leq R\}}{R} .$$

On a alors ([Coo93]) :

**Proposition 2.1.6.** *Si  $\Gamma$  est quasi-convexe-cocompact (voir [Coo93] pour la définition) alors  $\Lambda_\Gamma$  est de dimension de Hausdorff  $v_a(\Gamma)$  (vis à vis de la distance définie précédemment à partir de  $a$ ) et la mesure de Hausdorff sur  $\Lambda_\Gamma$  est finie et non nulle.*

On ne s'étendra pas sur cette notion ; on utilisera juste le fait qu'un groupe hyperbolique agissant sur son graphe de Cayley est quasi-convexe-cocompact (voir [Coo93]).

### 2.1.5 Comportement des marches aléatoires

On s'est donné un espace  $\delta$ -hyperbolique  $(X, d)$  (géodésique et propre). On se donne de plus une mesure  $\mu$  portée par le groupe des isométries de  $(X, d)$ ; et on suppose que le support de  $\mu$  engendre en tant que semi-groupe un sous-groupe  $\Gamma$  agissant proprement discontinuement sur  $(X, d)$ , et non-élémentaire. On s'intéresse à l'orbite de  $o$  sous la marche  $(x_n) : (x_n o)$ , que l'on appellera aussi marche aléatoire.

**Proposition 2.1.7.** (*[Kai00]*) *Sous les hypothèses précédentes,  $(x_n o)$  converge  $\mathbb{P}$ -presque sûrement vers un élément  $x_\infty$  de  $\partial X$ . Notons  $\nu$  la distribution de  $x_\infty$ . Si de plus  $\mu$  admet un moment d'ordre 1, alors  $(\partial X, \nu)$  est la frontière de Poisson de la marche aléatoire  $(\Gamma, \mu)$ .*

Le support de  $\nu$  est bien sûr contenu dans l'ensemble limite  $\Lambda_\Gamma$  de  $\Gamma$ . En fait, comme l'ensemble limite est minimal, le support de  $\nu$  lui est égal. On peut le montrer par exemple à l'aide de la Proposition 2.1.5 via la propriété suivante :

**Proposition 2.1.8.** *Soit  $U$  un ouvert de  $\partial X$  qui rencontre  $\Lambda_\Gamma$ . Alors  $\nu(U) > 0$ .*

*Démonstration.* Soient  $\gamma_1, \dots, \gamma_r \in \Gamma$  tels que

$$\Lambda_\Gamma \subset \bigcup_{1 \leq i \leq r} \gamma_i U ;$$

et soit  $s$  tel que  $\gamma_1, \dots, \gamma_r \in \text{supp}(\mu^s)$ . Comme  $\nu$  est  $\mu$ -stationnaire, on a

$$\nu(U) = \sum_{g \in \text{supp}(\mu^s)} \mu^s(g) \nu(gU) .$$

Et si on avait  $\nu(U) = 0$ , on aurait  $\nu(\Lambda_\Gamma) = 0$ . □

## 2.2 Une formule intégrale pour la vitesse de fuite

### 2.2.1 Fonctions de Busemann

On va définir des fonctions qui nous permettront d'exprimer la vitesse de fuite. Soit  $h$  un rayon géodésique. Quel que soit  $x$  dans  $X$ , la fonction  $t \mapsto d(x, h(t)) - t$  est décroissante et bornée (c'est juste une conséquence de l'inégalité triangulaire). On peut donc définir la fonction de Busemann associée à un rayon géodésique  $h$  de la manière suivante :

$$f_h(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} d(x, h(t)) - t .$$

Puis on définit un cocycle sur  $X^2$  en posant :

$$\beta_h(x, y) = f_h(y) - f_h(x) .$$

Remarquons que si  $h_1 \sim h_2$  avec une constante  $D$ , alors

$$|\beta_{h_1}(x, y) - \beta_{h_2}(x, y)| \leq 2D . \tag{2.5}$$

**Remarque 2.2.1.** *Supposons de plus que l'espace  $X$  ait la propriété (P) suivante : étant donnés deux rayons équivalents  $h_1$  et  $h_2$ , il existe  $T_0$  tel que*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(h_1(t), h_2(t + T_0)) = 0 .$$

*On a alors, si  $h_1 \sim h_2$ ,*

$$\beta_{h_1}(x, y) - \beta_{h_2}(x, y) = 0 ;$$

*et donc par passage au quotient ce cocycle en induit un autre sur  $\partial X$ , appelé cocycle de Busemann. Le plan hyperbolique  $\mathbb{H}^2$ , les arbres, et plus généralement les espaces  $CAT(-1)$  ont cette propriété. On ne la supposera pas vérifiée par la suite.*

Lorsque  $X$  ne vérifie pas la propriété (P) de la remarque précédente, l'inégalité (2.5) ne suffit pas à faire passer le cocycle au quotient. Cependant, deux rayons convergeant vers un même point à l'infini vérifient en fait la propriété suivante ([Coo93]) : il existe  $T_0$  tel que  $\lim_{t \rightarrow \infty} d(h_1(t), h_2(t + T_0)) \leq 16\delta$  . On en déduit :

**Lemme 2.2.1.** *Soit  $h_1$  et  $h_2$  deux rayons géodésiques de même extrémité  $\xi$ . Alors pour  $x$  et  $y$  dans  $X$ , on a*

$$|\beta_{h_1}(x, y) - \beta_{h_2}(x, y)| \leq C_1 ;$$

*où  $C_1$  est une constante qui ne dépend que de  $\delta$ .*

On peut alors poser, pour  $\xi$  dans  $\partial X$  et  $x, y$  dans  $X$ ,

$$\beta_\xi(x, y) = \sup\{\beta_h(x, y)\} ;$$

où la borne supérieure est prise sur tous les rayons d'extrémité  $\xi$ . En particulier, si  $h$  un rayon géodésique d'extrémité  $\xi$ , alors

$$|\beta_\xi(x, y) - \beta_h(x, y)| \leq C_1 . \tag{2.6}$$

Ce ne sera plus un cocycle mais on aura

$$|\beta_\xi(x, y) - (\beta_\xi(x, z) + \beta_\xi(z, y))| \leq 3C_1 .$$

On aura besoin du lemme suivant ([Coo93]) :

**Lemme 2.2.2.** *Soit  $\xi$  un point de  $\partial X$ ,  $h$  un rayon d'extrémité  $\xi$ . Soit  $x_1, x_2$  des points de  $X$ . Alors il existe un voisinage  $V$  de  $\xi$  tel que si  $y \in X \cap V$ ,*

$$|\beta_h(x_1, x_2) - (d(x_2, y) - d(x_1, y))| \leq C' ;$$

*où  $C'$  est une constante qui ne dépend que de  $\delta$ . En particulier on a*

$$|\beta_\xi(x_1, x_2) - (d(x_2, y) - d(x_1, y))| \leq C' + C_1 = C_2 .$$

**Remarque 2.2.2.** *On gardera les notations  $C_i$  dans ce qui suit.*

### 2.2.2 Vitesse de fuite

On va maintenant exprimer la vitesse de fuite d'une marche aléatoire à l'aide du "quasi-cocycle" de Busemann. On se donne une mesure  $\mu$  portée par un sous-groupe  $\Gamma$  du groupe des isométries de  $(X, d)$ , admettant un moment d'ordre 1. Pour plus de clarté, on se restreint tout d'abord au cas où  $X$  vérifie la propriété (P).

**Proposition 2.2.1.** *On suppose que  $X$  vérifie la propriété (P). Supposons de plus que la marche aléatoire  $(x_n o)$  associée à  $\mu$  converge presque sûrement vers un élément  $x_\infty$  de  $\partial X$ , dont la distribution est notée  $\nu$ . On a alors*

$$l(\Gamma, \mu) = \sum_g \mu(g) \int_{\partial X} \beta_\xi(o, g^{-1}o) d\nu(\xi) .$$

*Démonstration.* On note toujours  $\mathbb{P}$  la loi de la marche  $(x_n)$  dans l'espace des trajectoires,  $(h_n)$  la suite de ses accroissements et

$$L_n = \int d(o, x_n o) d\mathbb{P} .$$

On sait que

$$l(\Gamma, \mu) = \lim_n \frac{L_n}{n} ;$$

par conséquent, si la suite  $(L_{n+1} - L_n)$  admet une limite, celle-ci vaut  $l(\Gamma, \mu)$ . Or on a

$$\begin{aligned} L_{n+1} &= \int_{\Gamma} d(o, \gamma o) d\mu^{n+1}(\gamma) \\ &= \sum_g \mu(g) \int d(o, g\gamma o) d\mu^n(\gamma) \\ &= \sum_g \mu(g) \int d(o, gx_n o) d\mathbb{P} ; \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} L_{n+1} - L_n &= \sum_g \mu(g) \int (d(o, gx_n o) - d(o, x_n o)) d\mathbb{P} \\ &= \sum_g \mu(g) \int (d(g^{-1}o, x_n o) - d(o, x_n o)) d\mathbb{P} . \end{aligned}$$

Et comme  $(d(g^{-1}o, X_n o) - d(o, X_n o))_n$  converge presque sûrement vers  $\beta_{x_\infty}(o, g^{-1}o)$  et est majoré pour tout  $n$  par  $d(o, go)$  qui est une fonction intégrable pour  $\mu \otimes \mathbb{P}$ , on peut appliquer le théorème de convergence dominée qui donne :

$$\lim_n [L_{n+1} - L_n] = \sum_g \mu(g) \int \beta_\xi(o, g^{-1}o) d\nu(\xi) .$$

□



L'hypothèse de convergence de la marche aléatoire exigée dans la proposition précédente sera vérifiée dès que l'on suppose le sous-groupe engendré par le support de  $\mu$  non-élémentaire (Proposition 2.1.7). On revient maintenant au cas général, où l'on n'aura seulement une formule approchée.

**Proposition 2.2.2.** *On suppose que la marche aléatoire  $(x_n o)$  associée à  $\mu$  converge presque sûrement vers un élément  $x_\infty$  de  $\partial X$ , dont la distribution est notée  $\nu$ . On a alors*

$$\left| l(\Gamma, \mu) - \sum_g \mu(g) \int_{\partial X} \beta_\xi(o, g^{-1}o) d\nu(\xi) \right| \leq C_2 ;$$

$C_2$  étant la constante introduite dans le Lemme 2.2.2.

*Démonstration.* On a dans ce cas

$$\liminf_n (L_{n+1} - L_n) \leq l(\Gamma, \mu) \leq \limsup_n (L_{n+1} - L_n) . \quad (2.7)$$

Et l'égalité

$$L_{n+1} - L_n = \sum_g \mu(g) \int (d(g^{-1}o, x_n o) - d(o, x_n o)) d\mathbb{P}$$

démontrée précédemment reste valable. Le théorème de convergence dominée donne alors :

$$\liminf_n (L_{n+1} - L_n) \geq \sum_g \mu(g) \int \liminf_n (d(g^{-1}o, x_n o) - d(o, x_n o)) d\mathbb{P} .$$

De plus d'après le Lemme 2.2.2,

$$\left| \liminf_n (d(g^{-1}o, x_n o) - d(o, x_n o)) - \beta_{x_\infty}(o, g^{-1}o) \right| \leq C_2 ;$$

d'où

$$l(\Gamma, \mu) \geq \sum_g \mu(g) \int \beta_{x_\infty}(o, g^{-1}o) d\mathbb{P} - C_2 .$$

On procède de même pour la limite supérieure. □

## 2.3 Lien entre les quantités asymptotiques et la dimension de Hausdorff de la mesure harmonique

On se donne un sous-groupe  $\Gamma$  du groupe des isométries de  $(X, d)$  qui agit proprement discontinument, non élémentaire. On se donne également une mesure  $\mu$  sur  $\Gamma$  admettant un moment d'ordre 1 et dont le support engendre  $\Gamma$  en tant que semi-groupe. Rappelons également qu'on s'est fixé dans la partie 2.1.1 un réel  $a > 1$  et la distance  $d_a$  associée sur  $X \cup \partial X$ . On adopte par ailleurs les notations de la section précédente.

Dans [Kai98] il est démontré que dans le cas d'un arbre, la dimension de Hausdorff de la mesure harmonique (voir l'Appendice sur la dimension pour les définitions) est égale à  $h/l$ . On étend ici ce résultat au cas des espaces hyperboliques, du moins partiellement. En effet, on aura juste une inégalité du type  $\dim \nu \leq h/l$ . L'inégalité inverse semble plus difficile à obtenir dans le cas général car sa démonstration utilise le fait que dans le bord d'un arbre, les boules forment une partition.

On a  $\mathbb{P}$ -presque sûrement

$$\frac{(x_{n-1}|x_n)}{n} \longrightarrow l ;$$

et

$$-\frac{\log \mu^n(x_n)}{n} \longrightarrow h .$$

On définit pour  $\epsilon > 0$  et  $N$  l'ensemble  $\Omega_\epsilon^N$  des trajectoires telles que pour  $n \geq N$ ,

- $(x_{n-1}|x_n) > (l - \epsilon)n$
- $-\log \mu^n(x_n) < (h - \epsilon)n$ .

Pour  $\eta > 0$  il existe alors un entier  $N_{\epsilon,\eta}$  tel que

$$\forall N \geq N_{\epsilon,\eta} , \quad \mathbb{P}(\Omega_\epsilon^N) > 1 - \eta ;$$

on note  $\Omega_{\epsilon,\eta} = \Omega_\epsilon^{N_{\epsilon,\eta}}$ . Notons également  $C_{\mathbf{x}}^n$  l'ensemble des trajectoires dont la  $n^{\text{ème}}$  position coïncide avec  $x_n$ . On a alors :

**Lemme 2.3.1.** ([Kai98]) *Sur un ensemble  $\Lambda_{\epsilon,\eta} \subset \Omega_{\epsilon,\eta}$  de mesure plus grande que  $1 - 2\eta$ , la quantité*

$$\frac{\mathbb{P}(C_{\mathbf{x}}^n \cap \Omega_{\epsilon,\eta})}{\mu^n(x_n)}$$

*admet  $\mathbb{P}$ -presque sûrement une limite strictement positive lorsque  $n$  tend vers l'infini. En particulier, sur cet ensemble, on a*

$$\limsup_n \frac{\log \mathbb{P}(C_{\mathbf{x}}^n \cap \Omega_{\epsilon,\eta})}{n} = \limsup_n \frac{\log \mu^n(x_n)}{n} .$$

Notons, pour  $\xi \in \partial X$  et  $r > 0$ ,

$$D(\xi, r) = \{\mathbf{x} : x_\infty \in B(\xi, r)\} .$$

**Lemme 2.3.2.** *Les réels  $\eta$  et  $\epsilon$  étant fixés, on a, pour  $\mathbf{x} \in \Lambda_{\epsilon,\eta}$  et,  $n \geq N_{\epsilon,\eta}$ ,*

$$C_{\mathbf{x}}^n \cap \Omega_{\epsilon,\eta} \subset D\left(x_\infty, \frac{2\lambda a^{-(l-\epsilon)(n+1)}}{1 - a^{-(l-\epsilon)}}\right) ;$$

$\lambda$  étant la constante introduite dans la Proposition 2.1.1.

*Démonstration.* On fixe  $\mathbf{x} \in \Lambda_{\epsilon,\eta}$ . Soit  $\mathbf{x}' \in C_{\mathbf{x}}^n \cap \Omega_{\epsilon,\eta}$  ; on a alors, si  $n$  est assez grand,  $(x'_{n-1}|x'_n) > (l - \epsilon)n$  ; donc, d'après la Proposition 2.1.1,

$$d_a(x'_{n-1}, x'_n) \leq \lambda a^{-n(l-\epsilon)} .$$

D'où, pour  $m > n$ ,

$$d_a(x'_n, x'_m) \leq \lambda a^{-(n+1)(l-\epsilon)} \sum_{k=0}^{m-1} a^{-k(l-\epsilon)} ;$$

et donc

$$d_a(x'_n, x'_\infty) \leq \frac{\lambda a^{-(n+1)(l-\epsilon)}}{1 - a^{-(l-\epsilon)}} .$$

Comme  $\mathbf{x}$  appartient clairement à  $C_{\mathbf{x}}^n \cap \Omega_{\epsilon, \eta}$ , on obtient

$$d_a(x_\infty, x'_\infty) \leq \frac{2\lambda a^{-(n+1)(l-\epsilon)}}{1 - a^{-(l-\epsilon)}} .$$

□

Le lemme précédent nous donne une minoration de la  $\nu$ -mesure des boules de  $\partial X$ , ce qui nous permet d'obtenir :

**Théorème 2.1.** *Pour  $\nu$ -presque tout  $\xi$ ,*

$$\overline{\dim}_P \nu(\xi) \leq \frac{1}{\log a} \frac{h}{l} .$$

*Démonstration.* Soit  $\mathbf{x}$  dans  $\Lambda_{\epsilon, \eta}$ . On a

$$\overline{\dim}_P \nu(x_\infty) = \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\log \nu B(x_\infty, r)}{\log r} = \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\log \mathbb{P} D(x_\infty, r)}{\log r} ;$$

et en remplaçant  $r$  par  $\frac{2\lambda a^{-(n+1)(l-\epsilon)}}{1 - a^{-(l-\epsilon)}}$ ,

$$\overline{\dim}_P \nu(x_\infty) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \mathbb{P} D\left(x_\infty, \frac{2\lambda a^{-(l-\epsilon)(n+1)}}{1 - a^{-(l-\epsilon)}}\right)}{-\log a (n+1)(l-\epsilon)} .$$

En appliquant le lemme précédent, on obtient donc

$$\overline{\dim}_P \nu(x_\infty) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \mathbb{P}(C_{\mathbf{x}}^n \cap \Omega_{\epsilon, \eta})}{-\log a (n+1)(l-\epsilon)} ;$$

puis en appliquant le premier lemme,

$$\overline{\dim}_P \nu(x_\infty) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{-\log \mu^n(x_n)}{\log a (n+1)(l-\epsilon)} = \frac{h}{\log a (l-\epsilon)} .$$

Comme ceci est vrai pour tout  $\epsilon$  sur un ensemble de mesure  $1 - 2\eta$  quel que soit  $\eta$ , on obtient le résultat. □

En appliquant le Théorème 2.1 et la Proposition 6.2.1, on obtient alors un résultat sur la dimension de Hausdorff proprement dite et non plus sur la dimension ponctuelle :

**Corollaire 2.3.1.** *Sous les hypothèses faites au début de la section, si de plus  $\Gamma$  est quasi convexe-cocompact, la dimension de Hausdorff de la mesure harmonique associée à la marche aléatoire  $(\Gamma, \mu)$  est majorée par  $h/(l \log a)$ .*

## 2.4 Construction d'une mesure harmonique de petite dimension

On se donne un sous-groupe  $\Gamma$  du groupe des isométries de  $(X, d)$  qui agit proprement discontinument, non élémentaire. On se donne également une mesure  $\mu$  sur  $\Gamma$  admettant un moment d'ordre 1 et dont le support engendre  $\Gamma$  en tant que semi-groupe.

On va à partir de  $\mu$  construire une mesure harmonique de dimension aussi petite que voulu.

### 2.4.1 Introduction de la suite $(\mu_k)$

On fixe un élément hyperbolique (voir la Définition 2.1.4)  $\gamma_0$  de  $\Gamma$ ; et on note  $\gamma_k = \gamma_0^k o$  et  $\gamma_{\pm} = \lim_{k \rightarrow \pm\infty} \gamma_k$ . On pose ensuite, pour chaque  $k \geq 0$ ,

$$\mu_k = \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{4}(\delta_{\gamma_0^k} + \delta_{\gamma_0^{-k}}) .$$

Remarquons que chaque  $\mu_k$  vérifie les hypothèse de la section 2.1.5. On note  $\nu_k$  la mesure harmonique associée à chaque  $\mu_k$ . Notre but dans cette partie va être de montrer que  $h(\Gamma, \mu_k)/l(\Gamma, \mu_k)$  tend vers 0 lorsque  $k$  tend vers l'infini.

**Proposition 2.4.1.** *La quantité  $h(\Gamma, \mu_k)$  est bornée par une constante qui ne dépend pas de  $k$ .*

*Démonstration.* On sait que  $h(\Gamma, \mu_k)$  est majorée par  $H(\mu_k)$  et on a

$$\begin{aligned} H(\mu_k) &= -\frac{1}{2} \sum_g \mu(g) \log \left( \frac{1}{2}\mu(g) + \frac{1}{4}(\delta_{\gamma_k}(g) + \delta_{\gamma_{-k}}(g)) \right) \\ &\quad - \frac{1}{4} \log \left( \frac{1}{2}\mu(\gamma_k) + \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{4} \log \left( \frac{1}{2}\mu(\gamma_{-k}) + \frac{1}{4} \right) \\ &\leq -\frac{1}{2} \sum_g \mu(g) \log \left( \frac{1}{2}\mu(g) \right) - \frac{1}{2} \log \left( \frac{1}{4} \right) , \end{aligned}$$

D'où

$$h(\Gamma, \mu_k) \leq \frac{3 \log 2}{2} + \frac{1}{2}H(\mu) .$$

□

Il va donc nous suffire de montrer que  $l(\Gamma, \mu_k)$  tend l'infini. Pour cela, on utilise la formule de la Proposition 2.2.2, qui donne :

$$l(\Gamma, \mu_k) \geq \sum_g \mu_k(g) \int_{\partial X} \beta_{\xi}(o, g^{-1}o) d\nu_k(\xi) - C_2 .$$

Or

$$\begin{aligned} \sum_g \mu_k(g) \int_{\partial X} \beta_{\xi}(o, g^{-1}o) d\nu_k(\xi) &= \frac{1}{2} \sum_g \mu(g) \int_{\partial X} \beta_{\xi}(o, g^{-1}o) d\nu_k(\xi) \\ &\quad + \frac{1}{4} \int_{\partial X} [\beta_{\xi}(o, \gamma_k) + \beta_{\xi}(o, \gamma_{-k})] d\nu_k(\xi) ; \end{aligned}$$

et comme  $|\beta_\xi(o, g^{-1}o)| \leq d(o, go)$ , le premier élément de cette somme est majoré en valeur absolue par  $L(\mu)/2$ ; d'où, en notant  $C_3 = C_2 + L(\mu)/2$

$$l(\Gamma, \mu_k) \geq \frac{1}{4} \int_{\partial X} [\beta_\xi(o, \gamma_k) + \beta_\xi(o, \gamma_{-k})] d\nu_k(\xi) - C_3. \quad (2.8)$$

On va par la suite estimer la quantité entre crochets dans l'équation qui précède.

### 2.4.2 Estimation de $[\beta_\xi(o, \gamma_k) + \beta_\xi(o, \gamma_{-k})]$

On va tout d'abord montrer une inégalité de convexité basée sur la proposition suivante :

**Proposition 2.4.2.** ([CDP90]) *Dans l'espace  $\delta$ -hyperbolique  $(X, d)$ , la distance vérifie la propriété de quasi-convexité suivante : soient  $x_1$  et  $x_2$  deux points de  $X$  et  $s : [0, 1] \rightarrow X$  un paramétrage à vitesse constante du segment joignant  $x_1$  à  $x_2$ . Alors si  $y$  est un autre point de  $X$ , on a pour tout  $t$  dans  $[0, 1]$ ,*

$$d(y, s(t)) \leq td(y, x_1) + (1-t)d(y, x_2) + 4\delta.$$

On en déduit la propriété suivante :

**Proposition 2.4.3.** *Il existe une constante  $C_4$  ne dépendant que de  $\delta$  et  $\gamma_0$  telle que quels que soient  $k \geq 0$  et  $\xi \in \partial X$ ,*

$$\beta_\xi(o, \gamma_k) + \beta_\xi(o, \gamma_{-k}) \geq C_4.$$

*Démonstration.* Soit  $\sigma$  une géodésique joignant  $\gamma_+$  à  $\gamma_-$ ,  $K$  la distance de Hausdorff entre  $\sigma$  et la quasi-géodésique associée à  $\gamma_0$  (voir prop. 2.1.2). Soit  $o'$  sur  $\sigma$  tel que  $d(o, o') \leq K + 1$ ,  $\gamma'_{\pm k}$  sur  $\sigma$  tels que  $d(\gamma_{\pm k}, \gamma'_{\pm k}) \leq K + 1$ . On note  $m'_k$  le milieu du segment  $[\gamma'_k, \gamma'_{-k}]$ .

On a, pour  $y$  dans  $X$ ,

$$d(y, \gamma_k) - d(y, o) + d(y, \gamma_{-k}) - d(y, o) \geq d(y, \gamma'_k) - d(y, o') + d(y, \gamma'_{-k}) - d(y, o') - 4(K + 1);$$

et

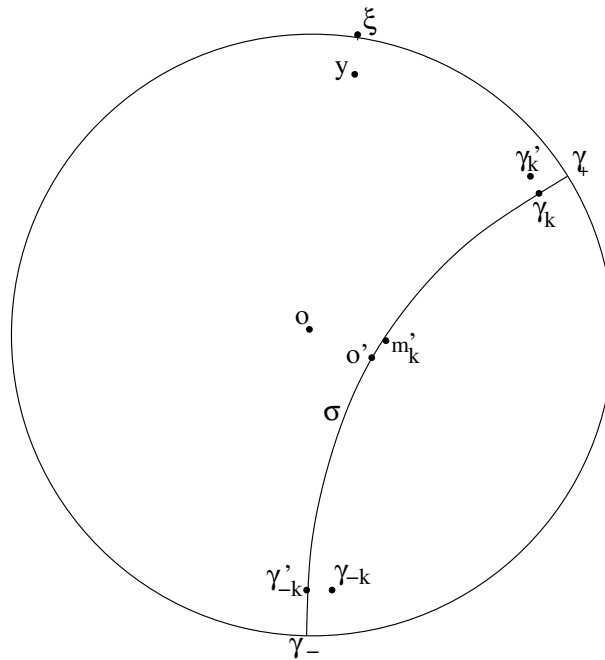
$$d(y, \gamma'_k) - d(y, o') + d(y, \gamma'_{-k}) - d(y, o') \geq d(y, \gamma'_k) + d(y, \gamma'_{-k}) - 2d(y, m'_k) - 2d(o', m'_k).$$

En utilisant la propriété de convexité de la distance on obtient

$$d(y, \gamma'_k) + d(y, \gamma'_{-k}) - 2d(y, m'_k) \geq -8\delta;$$

et comme  $d(o, \gamma_k) = d(o, \gamma_{-k})$ ,

$$\begin{aligned} |d(o', \gamma'_k) - d(o', \gamma'_{-k})| &= \left| [d(o', \gamma'_k) - d(o, \gamma'_k) + d(o, \gamma'_k) - d(o, \gamma_k)] \right. \\ &\quad \left. - [d(o', \gamma'_{-k}) - d(o, \gamma'_{-k}) + d(o, \gamma'_{-k}) - d(o, \gamma_{-k})] \right| \\ &\leq 2d(o, o') + d(\gamma'_k, \gamma_k) + d(\gamma'_{-k}, \gamma_{-k}) \leq 4(K + 1); \end{aligned}$$



ce qui donne

$$d(o', m'_k) \leq 2(K + 1) .$$

Ainsi on obtient

$$d(y, \gamma_k) - d(y, o) + d(y, \gamma_{-k}) - d(y, o) \geq -4(K + 1) - 8\delta - 4(K + 1) ;$$

et le Lemme 2.2.2 nous permet de conclure, en notant  $8(K + 1) + 8\delta + C_2 = C_4$ .  $\square$

On va ensuite montrer que sur un ensemble "assez gros" (vis à vis des mesures  $\nu_k$ ) du bord,  $[\beta_\xi(o, \gamma_k) + \beta_\xi(o, \gamma_{-k})]$  tend vers plus l'infini lorsque  $k$  tend vers l'infini. On a, si  $y$  est assez proche de  $\xi$ , toujours en se servant du Lemme 2.2.2,

$$\beta_\xi(o, \gamma_k) + \beta_\xi(o, \gamma_{-k}) \geq d(y, \gamma_k) - d(y, o) + d(y, \gamma_{-k}) - d(y, o) - C_2 ;$$

et donc

$$\beta_\xi(o, \gamma_k) + \beta_\xi(o, \gamma_{-k}) \geq d(o, \gamma_k) + d(o, \gamma_{-k}) - 2(y|\gamma_k) - 2(y|\gamma_{-k}) - C_2 ; \quad (2.9)$$

et comme les deux produits de Gromov qui se trouvent dans cette somme sont bornés uniformément en  $k$  lorsque  $\xi \notin \{\gamma_+, \gamma_-\}$ , on a bien alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_\xi(o, \gamma_k) + \beta_\xi(o, \gamma_{-k}) = +\infty .$$

Mais pour pouvoir conclure à l'aide de la formule (2.8), il faut montrer que la quantité  $[\beta_\xi(o, \gamma_k) + \beta_\xi(o, \gamma_{-k})]$  tend vers l'infini de manière uniforme sur un ensemble dont la  $\nu_k$ -mesure reste plus grande qu'une constante. On va pour cela utiliser le lemme suivant :

**Lemme 2.4.1.** *Soit  $U$  un voisinage de  $\gamma_+$  dans  $\partial X$ . Alors il existe une constante  $C > 0$  et un entier  $K$  tels que si  $k \geq K$ , on ait pour tout  $\xi \notin U$*

$$(\xi|\gamma_k) \leq C .$$

*Démonstration.* On a vu que la topologie sur  $\partial X$  était définie par les voisinages du type  $\{\xi' : (\xi|\xi') \geq C'\}$ . Soit  $C'$  tel que si  $(\xi|\gamma_+) \geq C'$ , alors  $\xi \in U$ . Soit  $K$  tel que si  $k \geq K$ , alors  $(\gamma_k|\gamma_+) \geq C' + \delta$ . Soit alors  $\xi \notin U$ ; si on avait  $(\gamma_k|\xi) \geq C' + \delta$ , on aurait

$$(\xi|\gamma_+) \geq \min\{(\gamma_k|\gamma_+), (\gamma_k|\xi)\} - \delta \geq C' ;$$

d'où le résultat en prenant  $C = C' + \delta$ .  $\square$

Evidemment on a une propriété analogue avec  $\gamma_-$ .

On a vu dans la partie 2.1.5 comment on pouvait montrer à l'aide de la Proposition 2.1.5 que la mesure harmonique d'un ouvert était strictement positive. On va voir que l'on peut de la même manière minorer la  $\nu_k$ -mesure d'un ouvert uniformément en  $k$ .

**Proposition 2.4.4.** *Soit  $U$  un ouvert rencontrant  $\Lambda_\Gamma$ . Il existe une constante  $\alpha > 0$  (qui dépend de  $U$  et de  $\mu$ ) telle que quel que soit  $k$ ,*

$$\nu_k(U) \geq \alpha .$$

*Démonstration.* On prend  $\gamma_1, \dots, \gamma_r \in \Gamma$  tels que

$$\Lambda_\Gamma \subset \bigcup_{1 \leq i \leq r} \gamma_i U ;$$

et  $s$  tel que  $\gamma_1, \dots, \gamma_r \in \text{supp}(\mu^s)$ . On fait alors la remarque suivante : on a une sorte de stationnarité uniforme des  $\nu_k$ . En effet, comme  $\nu_k = \mu_k * \nu_k$  et pour tout  $k$   $\mu_k \geq 1/2\mu$ , on a

$$\nu_k \geq \frac{1}{2^s} \mu^s * \nu_k ;$$

et donc

$$\begin{aligned} \nu_k(U) &\geq \frac{1}{2^s} \sum_{g \in \text{supp}(\mu^s)} \mu^s(g) \nu_k(gU) \\ &\geq \frac{1}{2^s} \sum_i \mu^s(\gamma_i) \nu_k(\gamma_i U) \\ &\geq \frac{1}{2^s} \min_i \mu^s(\gamma_i) . \end{aligned}$$

$\square$

Comme  $\Gamma$  est non-élémentaire,  $\Lambda_\Gamma$  contient un élément distinct de  $\gamma_+$  et  $\gamma_-$ ; on choisit un ouvert  $U$  rencontrant  $\Lambda_\Gamma$  et ne contenant ni  $\gamma_+$  ni  $\gamma_-$ . On utilise ensuite le Lemme 2.4.1 appliqué au voisinage  $\partial X \setminus U$  de  $\gamma_+$  (et  $\gamma_-$ ), on prend  $C_5$  et  $K$  tels que si  $k \geq K$  et  $\xi \in U$ ,

$$(\xi|\gamma_{\mp k}) \leq C_5 .$$

D'après la formule (2.9), on a, pour  $k \geq K$  et  $\xi \in U$  :

$$\beta_\xi(o, \gamma_k) + \beta_\xi(o, \gamma_{-k}) \geq 2d(o, \gamma_k) - 4C_5 - C_2 .$$

De plus la formule (2.8) et la Proposition 2.4.3 nous donnent

$$l(\Gamma, \mu_k) \geq \frac{1}{4} \int_U [\beta_\xi(o, \gamma_k) + \beta_\xi(o, \gamma_{-k})] d\nu_k(\xi) - \frac{C_4}{4} + C_3 ;$$

ainsi en utilisant la proposition précédente (avec  $\alpha$  associé à  $U$ ) on obtient

$$l(\Gamma, \mu_k) \geq \frac{\alpha}{4} [2d(o, \gamma_k) - 4C_5 - C_2] - \frac{C_4}{4} - C_3 .$$

Puisque le premier élément du membre de droite de l'inégalité précédente tend vers l'infini, cela nous donne :

**Proposition 2.4.5.** *Avec les notations adoptées précédemment,,*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{h(\Gamma, \mu_k)}{l(\Gamma, \mu_k)} = 0 .$$

## 2.5 Résultat principal

En rassemblant la Proposition 2.4.5 et les résultats de la section 2.3, on obtient le résultat suivant :

**Théorème 2.2.** *Soit  $(X, d)$  un espace hyperbolique. Soit  $\Gamma$  un sous-groupe d'isométries agissant proprement discontinument sur  $X$ , non élémentaire. Alors quel que soit  $\epsilon > 0$  il existe sur  $\Gamma$  une mesure de probabilité  $\mu$  symétrique admettant un moment d'ordre 1, dont le support engendre  $\Gamma$ , et qui a la propriété suivante : la dimension ponctuelle de la mesure harmonique associée à la marche aléatoire  $(\Gamma, \mu)$  est  $\nu$ -presque sûrement plus petite que  $\epsilon$ .*

**Remarque 2.5.1.** *Vue notre construction, on peut bien sûr, lorsque  $\Gamma$  est finiment engendré, imposer dans le théorème précédent que le support de  $\mu$  soit fini.*

On se restreint maintenant au cas où  $(X, d)$  est le graphe de Cayley de  $\Gamma$ , cadre dans lequel la dimension de Hausdorff du bord hyperbolique  $\partial\Gamma$  pour la distance  $d_a$  est  $v_a(\Gamma)$  et où la mesure de Hausdorff est finie non nulle ([Coo93]). En prenant en compte le Corollaire 2.3.1, on obtient alors une comparaison entre les dimensions de Hausdorff de la mesure harmonique et celle de l'ensemble limite :

**Corollaire 2.5.1.** *Si en plus des hypothèses précédentes  $X$  est le graphe de Cayley de  $\Gamma$ , alors il existe sur  $\Gamma$  une mesure de probabilité  $\mu$  à support fini, dont le support engendre  $\Gamma$ , et qui a la propriété suivante : la dimension de Hausdorff de la mesure harmonique associée à la marche aléatoire  $(\Gamma, \mu)$  est strictement inférieure à la dimension de Hausdorff  $v_a(\Gamma)$  de  $\partial\Gamma$ . En particulier la mesure harmonique est alors singulière par rapport à la mesure de Hausdorff sur le bord du groupe.*



## 2.6 Comportement asymptotique de la suite $(\nu_k)$

On reprend dans cette section la construction de la section 2.4. On souhaite préciser le comportement asymptotique de la suite de mesures de probabilité  $(\nu_k)$ . Dans le cas général, on va montrer que toute valeur d'adhérence (on considère la convergence faible) de  $(\nu_k)$  possède des atomes. Ensuite en se restreignant au cas du groupe libre on a un résultat plus précis : la suite  $(\nu_k)$  converge faiblement vers une mesure atomique.

### 2.6.1 Cas général

Puisque  $\partial X$  est compact, il existe une sous-suite de  $(\nu_k)$ , que nous appellerons toujours  $(\nu_k)$ , qui converge faiblement vers une mesure de probabilité  $\nu$ .

**Lemme 2.6.1.** *Il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout voisinage ouvert  $U_+$  de  $\gamma_+$  on ait*

$$\nu(U_+) \geq C .$$

*Démonstration.* Prenons un ouvert  $U$  dans  $\partial X$  qui rencontre  $\Lambda_\Gamma$  et dont la fermeture ne contient pas  $\gamma_-$ . En utilisant la Proposition 2.4.4 on obtient une constante  $\alpha > 0$  telle que pour tout  $k$   $\nu_k(U) \geq \alpha$ . Comme  $U$  est contenu dans un compact de  $\partial X$  qui ne contient pas  $\gamma_-$ , la suite  $(\gamma_0^k \xi)$  converge uniformément vers  $\gamma_+$  sur  $U$  (voir [Coo90]). Alors si  $k$  est assez grand,

$$\nu_k(U_+) \geq \nu_k(\gamma_0^k U) ;$$

et en utilisant l'égalité  $\nu_k = \mu_k * \nu_k$  on a alors

$$\nu_k(U_+) \geq \frac{1}{4} \gamma_0^k \nu_k(\gamma_0^k U) \geq \frac{\alpha}{4} .$$

Puisque c'est vrai pour tout  $k$  assez grand, on obtient le résultat.  $\square$

**Proposition 2.6.1.** *Tous les points des orbites de  $\gamma_+$  et  $\gamma_-$  sous  $\Gamma$  sont des atomes pour la mesure  $\nu$ .*

*Démonstration.* Le lemme précédent implique que  $\gamma_+$  est un atome pour  $\nu$  car

$$\nu(\gamma_+) \geq \inf\{\nu(U_+)\} ;$$

où l'infimum est pris sur l'ensemble des voisinages ouverts  $U_+$  de  $\gamma_+$ . Si  $g \in \text{supp}(\mu)$ , comme  $\nu_k \geq \frac{1}{2}\mu * \nu_k$ ,

$$\nu_k(gU_+) \geq 1/2\mu(g)\nu_k(U_+) ;$$

ainsi le lemme précédent reste vrai avec les voisinages de  $g\gamma_+$ . Cela reste vrai pour tout  $g$  dans  $\Gamma$  car  $\text{supp}(\mu)$  engendre  $\Gamma$ .  $\square$

Remarquons qu'une conséquence de cette proposition est que  $\nu$  ne peut pas être une mesure harmonique associée à une certaine mesure  $\mu'$ .

### 2.6.2 Cas d'un groupe libre finiment engendré

On se restreint au groupe libre à deux générateurs  $\mathbb{F}_2 = \langle a, b \rangle$ . On considère toujours une suite  $(\mu_k)$  de mesures comme dans la section 2.4 avec  $\gamma_0 = a$ ; on a alors  $\gamma_+ = aaa \dots$ . On utilisera le fait que dans ce cas le bord hyperbolique  $\partial\mathbb{F}_2$  est l'ensemble des mots infinis réduits. Pour un mot fini  $w$ , on note  $C_w$  l'ensemble des mots infinis réduits commençant par  $w$ . On veut montrer que la suite  $(\nu_k)$  converge faiblement vers une mesure atomique  $\nu$ . Choisissons une valeur d'adhérence  $\nu$  de  $(\nu_k)$  comme dans la partie précédente.

Afin de déterminer  $\nu$ , on va considérer une marche aléatoire sur  $\mathbb{F}_3 = \langle a, b, c \rangle$  et ensuite la projeter sur  $\mathbb{F}_2 = \langle a, b \rangle$ . On définit sur  $\mathbb{F}_3$  la mesure  $\tilde{\mu}$  par  $\tilde{\mu}(w) = 1/2\mu(w)$  si  $w$  est dans  $\langle a, b \rangle$ ; et  $\tilde{\mu}(c) = \tilde{\mu}(c^{-1}) = 1/4$ . On note  $(\tilde{x}_n)$  la marche aléatoire associée,  $\tilde{\nu}$  la mesure harmonique associée. Pour chaque  $k$  on note  $\Phi_k$  le morphisme de  $\mathbb{F}_3$  vers  $\mathbb{F}_2$  qui coïncide avec l'identité sur  $\mathbb{F}_2 = \langle a, b \rangle$  et tel que  $\Phi_k(c^{\pm 1}) = a^{\pm k}$ . On a alors  $\mu_k = \Phi_k(\tilde{\mu})$  et  $(\Phi_k(\tilde{x}_n))$  est la marche aléatoire associée à  $\mu_k$ . On va exprimer  $\nu$  à l'aide de  $\tilde{\nu}$ .

Pour un mot infini  $\xi_1\xi_2\dots$ ,  $\xi_i \in \{a^{\pm 1}, b^{\pm 1}, c^{\pm 1}\}$ , de  $\partial\mathbb{F}_3$ , on note  $(\xi_{l_i})_{i>0}$  la sous-suite constituée par les  $\xi_i \in \{b^{\pm 1}\}$ . Pour  $i \geq 2$ , on note  $w_{l_i}$  le mot de  $\langle a, c \rangle$  qui se situe entre  $\xi_{l_i}$  et  $\xi_{l_{i-1}}$ , et  $w_{l_1}$  le mot situé avant  $\xi_{l_1}$ . L'ensemble  $\Omega$  sur lequel  $(\xi_{l_i})_{i>0}$  est infini est de  $\tilde{\nu}$ -mesure 1. De plus sur cet ensemble on peut étendre  $\Phi_k$  en une application de  $\partial\mathbb{F}_3$  vers  $\partial\mathbb{F}_2$ ; et l'on a alors  $\nu_k = \Phi_k(\tilde{\nu})$ .

Notre idée est d'utiliser le fait que quand  $k$  tend vers l'infini, la mesure  $\nu_k$  se concentre sur les orbites de  $\gamma_+$  et  $\gamma_-$ . Afin d'éviter les situations où les  $a^k$  s'annulent les uns les autres, on introduit quelques notations supplémentaires. Chaque  $w_{l_i}$  est de la forme  $w_{l_i} = c^{\epsilon_1}a^{\eta_1}\dots c^{\epsilon_r}a^{\eta_r}$ , avec  $\epsilon_j$  et  $\eta_j$  dans  $\{-1, 0, 1\}$ . Lorsque l'on projette ce mot par  $\Phi_k$  on va obtenir

$$a^{k(\epsilon_1+\dots+\epsilon_r)}a^{\eta_1+\dots+\eta_r}.$$

Si  $\epsilon_1 + \dots + \epsilon_r = 0$ , les  $a^{k\epsilon_i}$  s'annulent les uns les autres; c'est pourquoi on considère le premier  $i$  tel que  $\epsilon_1 + \dots + \epsilon_r \neq 0$ , que l'on note  $i_0$ . Les  $\epsilon_j$  et  $\eta_j$  désignent maintenant ceux associés à  $w_{l_{i_0}}$ . En utilisant les notations qui précèdent, on définit une application  $\psi$  de  $\partial\mathbb{F}_3$  vers  $\partial\mathbb{F}_2$  par

$$\psi(\xi_1\xi_2\dots) = \Phi_k(\xi_1\dots\xi_{l_{i_0-1}})\gamma_{\text{sign}(\epsilon_1+\dots+\epsilon_r)}.$$

Notons que  $\psi$  ne dépend pas de  $k$ . Prenons un exemple :

$$\psi(bcac^{-1}bcacb\dots) = bab\gamma_+.$$

**Lemme 2.6.2.** *Pour tout  $g$  dans  $\mathbb{F}_2$  dont la dernière lettre n'est pas  $a^{\pm 1}$ ,*

$$\nu(g\gamma_{\pm}) \geq \tilde{\nu}\{\xi \in \partial\mathbb{F}_3 : \psi(\xi) = g\gamma_{\pm}\}.$$

*Démonstration.* Notons  $S_g^+ = \{\xi \in \Omega : \psi(\xi) = g\gamma_+\}$ . Si  $\xi \in S_g^+$ , on a

$$\Phi_k(\xi) = ga^{k(\epsilon_1+\dots+\epsilon_r)}a^{\eta_1+\dots+\eta_r}b^{\pm 1}\dots;$$

avec  $\epsilon_1 + \dots + \epsilon_r > 0$ . Rappelons que les  $\epsilon_j$  et  $\eta_j$  désignent ceux associés à  $w_{l_{i_0}}$  (voir ci-dessus). Ainsi si  $U$  est un voisinage de  $g\gamma_+$ , et lorsque  $\eta_1 + \dots + \eta_r$  n'est pas trop proche de  $-\infty$ , si  $k$  est assez grand,  $\Phi_k(\xi) \in U$ . Plus précisément, fixons  $\delta > 0$ ; comme la mesure  $\tilde{\nu}$  ne charge aucun point, il existe un entier positif  $N$  tel que

$$\tilde{\nu}(\{\xi \in S_g^+ : \eta_1 + \dots + \eta_r < -N\}) < \delta .$$

Pour chaque voisinage  $U$  de  $g\gamma_+$  il existe  $K$  tel que si  $k > K$

$$\nu_k(U) = \tilde{\nu}(\Phi_k^{-1}(U)) \geq \tilde{\nu}(S_g^+ \cap \{\xi \in S_g^+ : \eta_1 + \dots + \eta_r < -N\}) \geq \tilde{\nu}(S_g^+) - \delta .$$

Puisque cela est vrai pour tout voisinage  $U$  of  $g\gamma_+$  et tout  $\delta > 0$ , on obtient le résultat.  $\square$

Puisque la réunion des  $S_g^+$  et  $S_g^-$  est de  $\tilde{\nu}$ -mesure 1, la seule possibilité est que l'inégalité du lemme précédent soit en fait une égalité. Ainsi il y a une unique possibilité pour la valeur d'adhérence  $\nu$ , et on obtient le résultat qui suit.

**Proposition 2.6.2.** *La suite  $(\nu_k)$  converge faiblement vers la mesure atomique  $\nu$  définie par*

$$\nu(g\gamma_{\pm}) = \tilde{\nu}\{\xi \in \partial\mathbb{F}_3 : \psi(\xi) = g\gamma_{\pm}\} .$$

**Remarque 2.6.1.** *L'estimation qui précède est basée sur l'idée suivante : comme  $c$  est envoyé par  $\Phi_k$  sur  $a^k$ , lorsque  $k$  tend vers l'infini la mesure se concentre sur un mot infini de la forme  $gaaa\dots$ . Ce qui peut poser problème, c'est que l'on ait une séquence de la forme (par exemple)  $cac^{-1}$ , qui est envoyé par  $\Phi_k$  sur  $a$  et donc qui, lorsque l'on envoie  $c$  sur  $a^k$ , ne concentre pas le bord. Les détails techniques traités précédemment sont destinés à contrôler cette situation. Dans un cadre général, cela correspond à avoir une séquence  $chc^{-1}$  avec  $h$  dans le stabilisateur de  $\gamma_+$ . En effet, la suite  $\gamma_0^k h \gamma_0^{-k}$  est alors bornée. Ce qui fait qu'on ne peut pas étendre le raisonnement précédent est qu'en général cette suite ne sera pas constante. On a utilisé la particularité suivante des groupes libres : si un élément stabilise  $aa\dots$ , il commute avec  $a$  (il est en fait égal à une puissance de  $a$ ). Cependant notre calcul peut être appliqué au cas d'un produit libre fini de groupes finis. En effet dans ce cas le stabilisateur d'un point est trivial.*

# Chapitre 3

## Problème des générateurs extrémaux pour les produits libres de groupes finis

On aborde dans ce chapitre le problème de l'extrémalité des systèmes de générateurs. Précisons de quoi il s'agit. On se donne un groupe  $G$  finiment engendré, muni d'un système fini de générateurs  $S$ . La longueur (relativement à  $S$ )  $|x|_S$  d'un élément  $x$  de  $G$  est alors le nombre minimum d'éléments de  $S$  nécessaire pour écrire  $x$ ; et  $G$  est muni d'une distance  $d_S(x, y) = |x^{-1}y|_S$ . On considère une marche aléatoire  $(x_n)$  associée à une mesure  $\mu$  sur  $G$ , possédant un moment d'ordre 1. L'entropie asymptotique  $h$ , la vitesse de fuite  $l$  et la croissance  $v$  du groupe  $G$  sont alors reliées par l'inégalité fondamentale suivante ([Gui80]) :  $h \leq lv$ ; ou, si l'on veut préciser de quoi dépend chacun de ces termes :

$$h(\mu) \leq l(\mu, S)v(S) .$$

La quantité  $h/l$  mesure en quelque sorte la "bonne répartition" des trajectoires. Dans ([Ver00]), Vershik propose de considérer

$$Q(S) = \sup \frac{h(\mu)}{v(S)l(\mu, S)} ,$$

la borne supérieure étant prise sur l'ensemble des mesures de probabilité  $\mu$  dont le support est contenu dans  $S$  et engendre  $G$ , comme une mesure de la qualité du système de générateurs  $S$ ; et de dire que ce système est extrémal lorsque  $Q(S) = 1$ .

On va considérer dans ce chapitre le cas d'un produit libre de groupes finis :

$$G = G_1 * \cdots * G_q .$$

Fixons quelques notations. Pour  $\alpha \in \{1, \dots, q\}$ , on note

$$\Sigma_\alpha = G_\alpha \setminus \{e\} , \quad k_\alpha = \text{card}(\Sigma_\alpha) , \quad \Sigma = \bigsqcup_\alpha \Sigma_\alpha .$$

On se donne également un système symétrique de générateurs  $S$  inclus dans  $\Sigma$ . Si  $x \in \Sigma_\alpha$ , on notera  $\bar{x} = \alpha$ . Un mot  $g_1 \cdots g_r$ ,  $g_i \in \Sigma$ , est dit admissible si pour

$i = 1, \dots, n-1, \overline{g_i} \neq \overline{g_{i+1}}$ . Le groupe  $G$  est alors la réunion de  $\{e\}$  et de l'ensemble de ces éléments admissibles. Le bord hyperbolique  $\partial G$  de  $G$  s'identifie alors à l'ensemble  $\Sigma^\infty$  des mots infinis (à droite) admissibles. Si  $\xi$  et  $\xi'$  sont dans  $\partial G$ , on note  $\xi \wedge \xi'$  leur partie initiale commune. On définit alors une distance  $\delta_S$  sur  $\partial G$  en posant

$$\delta_S(\xi, \xi') = \exp(-|\xi \wedge \xi'|_S) .$$

On notera  $[\xi]_n$  l'éléments de  $G$  constitué des  $n$  première lettres du mot infini  $\xi$  et, pour  $g$  dans  $G$ ,  $C_g$  le cylindre constitué des mots infinis commençant par  $g$ , c'est à dire l'ensemble des mots infinis tels que  $[\xi]_{g|\Sigma} = g$ .

En l'absence de précisions, on supposera toujours par la suite que le support de la mesure  $\mu$  engendrant la marche aléatoire est inclus dans  $S$  et que ce support engendre  $G$  en tant que semi-groupe. On notera  $\nu$  la mesure harmonique associée à  $\mu$ .

Dans le cas du groupe des isométries d'un arbre, il est démontré dans [Kai98] que l'on a  $\dim \nu = h/l$ . Cette démonstration s'adapte à notre cadre :

**Proposition 3.0.3.** *La dimension étant relative à  $\delta_S$  et la vitesse de fuite à  $S$ , on a :*

$$\dim \nu = \frac{h}{l} .$$

Cette dernière proposition montre que le problème d'extrémalité des générateurs est un problème de maximisation de la dimension de la mesure harmonique. Ainsi il est relié à ce que l'on a fait dans le premier chapitre. Cependant, alors que dans ce chapitre on se plaçait dans le cadre général des groupes hyperboliques et que l'on utilisait des méthodes géométriques, on va ici se restreindre aux produits libres de groupes finis et utiliser des méthodes plus combinatoires.

On va chercher à déterminer,  $S$  étant fixé, s'il existe une mesure  $\mu$  dont le support est inclus dans  $S$  et telle que

$$\frac{h(\mu)}{v(S)l(\mu, S)} = 1 ; \tag{3.1}$$

et si celle-ci est unique. On dira également qu'une telle mesure est extrémale. En particulier, l'existence d'une telle mesure assure que  $S$  est extrémal. Dans [MM04], des exemples où une telle mesure existe (ou non) sont fournis, à l'aide d'un calcul de  $h/lv$  (lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on note simplement  $l$  et  $v$  la vitesse de fuite et la croissance relatives au système de générateurs  $S$  ambiant). On propose ici une approche plus systématique qui relie ce problème à un problème d'entropie maximale pour un système dynamique symbolique. Plus précisément, on introduit un sous-shift dont l'entropie topologique est  $e^v$ , et l'on montre que l'on a  $h = lv$  si et seulement si une certaine mesure  $\tilde{\nu}$  associée à  $\nu$  est d'entropie maximale pour ce sous-shift (Proposition 3.4.1).

Dans la première partie, on effectue des rappels sur la forme de la mesure harmonique dans ce cadre. Ensuite on envisage le cas où  $S = \Sigma$ . On démontre dans ce cas

l'existence et l'unicité de la mesure extrémale (Proposition 3.1), précisant ainsi le résultat d'existence contenu dans [MM04]. Dans la partie 3.4, on envisage le cas où  $S$  est quelconque. On obtient dans ce cas seulement un résultat partiel (Proposition 3.4.1). La partie 3.3 est consacrée à l'estimation de la croissance du groupe. On se place pour cela dans le cadre naturel des groupes fortement markoviens.

## 3.1 Mesure harmonique

On rappelle ici les résultats de [MM04] sur la mesure harmonique. Soit  $r$  une mesure de probabilité sur  $\Sigma$  chargeant tous les éléments de  $\Sigma$ . On appellera mesure markovienne multiplicative de base  $r$  la mesure markovienne  $m_r$  sur  $\Sigma^\infty$  de distribution initiale  $r$  et de probabilités de transition

$$p(x, y) = \frac{r(y)}{1 - r(\Sigma_{\bar{x}})} , \quad \bar{x} \neq \bar{y} . \quad (3.2)$$

**Proposition 3.1.1.** *Lorsque le nombre  $q$  de groupes dans le produit libre est supérieur ou égal à 3, deux mesures markoviennes multiplicatives  $m_r$  et  $m_{r'}$  de base  $r$  et  $r'$  ont les mêmes probabilités de transition si et seulement si  $r = r'$ . Lorsque  $q = 2$ , cela reste vrai si, pour  $i = 1$  et  $i = 2$ , les restrictions normalisées de  $r$  et  $r'$  à  $\Sigma_i$  sont égales.*

*Démonstration.* Supposons  $q \geq 3$ . Soient  $r$  et  $r'$  telles que  $m_r$  et  $m_{r'}$  sont équivalentes, c'est à dire ont les mêmes probabilités de transition :

$$\frac{r'(y)}{1 - r'(\Sigma_{\bar{x}})} = \frac{r(y)}{1 - r(\Sigma_{\bar{x}})} , \quad \bar{x} \neq \bar{y} . \quad (3.3)$$

On a alors en particulier, quels que soient  $\alpha$  et  $\beta$  dans  $\{1, \dots, q\}$ ,  $\alpha \neq \beta$ ,

$$\frac{r(\Sigma_\alpha)}{1 - r(\Sigma_\beta)} = \frac{r'(\Sigma_\alpha)}{1 - r'(\Sigma_\beta)} ;$$

ce qui entraîne (c'est ici que l'on se sert du fait que  $q \geq 3$ ) que pour tous  $\alpha$  et  $\beta$  dans  $\{1, \dots, q\}$ ,

$$\frac{r(\Sigma_\alpha)}{r'(\Sigma_\alpha)} = \frac{r(\Sigma_\beta)}{r'(\Sigma_\beta)} ;$$

et comme par ailleurs la somme des  $r(\Sigma_\alpha)$  ainsi que celle des  $r'(\Sigma_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, \dots, q\}$ , vaut 1, cela entraîne que pour tout  $\alpha \in \{1, \dots, q\}$ ,  $r(\Sigma_\alpha) = r'(\Sigma_\alpha)$ . On en déduit, en réutilisant l'égalité (3.3), que pour tout  $x \in \Sigma$ ,  $r(x) = r'(x)$ .

Lorsque  $q = 2$ , (3.3) est équivalente au fait que pour tout  $x \in \Sigma$ ,

$$\frac{r'(x)}{r'(\Sigma_{\bar{x}})} = \frac{r(x)}{r(\Sigma_{\bar{x}})} ;$$

c'est à dire au fait que les mesures  $r$  et  $r'$  restreintes à  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  et normalisées, sont égales.  $\square$

Remarquons que la mesure harmonique n'est pas en général invariante par le décalage car  $r$  ne coïncide pas en général avec la mesure stationnaire.

On revient maintenant à la marche aléatoire. Dans [MM04] une relation est établie entre la mesure  $\mu$  et la mesure harmonique associée  $\nu$  :

**Théorème 3.1.1.** *La mesure harmonique  $\nu$  est la mesure markovienne multiplicative dont la base  $r$  est déterminée par le système d'équations (dites équations de trafic) : pour tout  $x \in \Sigma$*

$$s(x) = \mu(x)(1 - s(\Sigma_{\bar{x}})) + \sum_{y \in \Sigma_{\bar{x}} \setminus x} \mu(y)s(y^{-1}x) + \sum_{y \notin \Sigma_{\bar{x}}} \mu(y) \frac{s(y^{-1})}{1 - s(\Sigma_{\bar{y}})} s(x) . \quad (3.4)$$

## 3.2 Cas où l'ensemble générateur est $\Sigma$

On considère la matrice  $A$  de sous-shift dont l'espace des états est  $\Sigma$  et telle que pour tous  $x$  et  $y$  dans  $\Sigma$  :

$$A_{xy} = \begin{cases} 1 & \text{si } \bar{x} \neq \bar{y} \\ 0 & \text{si } \bar{x} = \bar{y} \end{cases}$$

Clairement l'espace des trajectoires de ce sous-shift est  $\Sigma^\infty$ . On note  $\sigma$  le décalage dans l'espace des trajectoires. Etant donnée une mesure  $\mu$ , la mesure harmonique  $\nu$  n'est pas en général  $\sigma$ -invariante ; mais il existe une mesure  $\tilde{\nu}$   $\sigma$ -invariante possédant les mêmes probabilités de transition que  $\nu$  (et donc équivalente) : il suffit de remplacer la distribution initiale de  $\nu$  par la mesure stationnaire. On conserve cette notation  $\tilde{\nu}$  pour la suite.

Les deux lemmes qui suivent vont nous permettre de relier le problème d'extrémalité de  $\mu$  à un problème variationnel pour ce sous-shift.

**Lemme 3.2.1.** *Soit  $m$  une mesure de probabilité  $\sigma$ -invariante sur  $\Sigma^\infty$ . L'entropie de  $m$  pour le décalage (notée  $h_m$ ) est égale à la dimension de  $m$  ( $\Sigma^\infty$  étant muni de la distance  $\delta_\Sigma$ ).*

*Démonstration.* D'après la formule de Shannon-MacMillan-Breiman, on a, pour  $m$ -presque tout  $\xi \in \Sigma^\infty$ ,

$$h_m = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log m(C_{[\xi]_n}) .$$

Or on a également

$$-\frac{1}{n} \log m(C_{[\xi]_n}) = \frac{\log m(B(\xi, e^{-n}))}{\log(e^{-n})} .$$

□

Le second lemme sera prouvé dans un cadre plus général dans la section suivante (voir Proposition 3.3.1).

**Lemme 3.2.2.** *L'entropie topologique du sous-shift  $\sigma$  est  $v_\Sigma$ .*

Du premier lemme on déduit, comme  $\tilde{\nu} \sim \nu$ , que

$$h_{\tilde{\nu}} = \dim \nu .$$

Ainsi on déduit du second lemme que  $\dim \nu$  est égale à  $v$  si et seulement si  $\tilde{\nu}$  est d'entropie maximale. Rappelons que la mesure d'entropie maximale est unique et markovienne; on la note  $\tilde{\nu}_{\max}$ . On a donc, en utilisant la Proposition 3.0.3, :

**Proposition 3.2.1.** *La mesure  $\mu$  est extrémale si et seulement si  $\tilde{\nu}$  est la mesure d'entropie maximale, c'est à dire si et seulement si  $\nu$  a les mêmes probabilités de transition que  $\tilde{\nu}_{\max}$ .*

Pour répondre totalement à la question, il faut cependant discuter de l'existence et de l'unicité d'une mesure  $\mu$  telle que  $\nu$  ait cette propriété.

On peut dans ce cas déterminer la mesure d'entropie maximale de manière assez simple. On note pour la suite de cette section  $\rho = e^v$ .

**Proposition 3.2.2.** *Les probabilités de transition de la mesure d'entropie maximale sont données par*

$$p_{xy} = A_{xy} \frac{1}{\rho} \frac{k_{\overline{x}} + \rho}{k_{\overline{y}} + \rho} .$$

*Démonstration.* Notons  $\pi$  la solution de  $\pi A = \rho \pi$ . Pour des raisons de symétrie, si  $\overline{x} = \overline{y}$ , alors  $\pi_x = \pi_y$ ; pour chaque  $j$  dans  $\{1, \dots, q\}$ , on note  $\pi_j$  la valeur commune des  $\pi_x$ ,  $\overline{x} = j$ . L'équation  $\pi A = \rho \pi$  se traduit alors par :

$$\forall j \in \{1, \dots, q\}, \quad \sum_{i \neq j} \pi_i k_i = \rho \pi_j .$$

Or comme  $\sum_i \pi_i k_i = 1$ ,  $\sum_{i \neq j} \pi_i k_i = 1 - \pi_j k_j$ ; on obtient donc, pour  $j \in \{1, \dots, q\}$ ,

$$\pi_j = \frac{1}{\rho + k_j} .$$

De plus comme  $A$  est symétrique, le vecteur invariant à droite est le même. On en déduit  $p_{xy}$ . □

Remarquons que l'équation  $\sum_i k_i / (\rho + k_i) = 1$  détermine  $\rho$  de manière unique. Remarquons également que l'on a ici une expression simple de la mesure d'entropie maximale. En effet, notons  $m$  la mesure stationnaire associée aux probabilités de transition de la mesure d'entropie maximale; vue la proposition précédente, si un mot  $g$  s'écrit  $g = g_1 \cdots g_r$ ,  $\overline{g_i} \neq \overline{g_{i+1}}$ ,  $r \geq 2$ , alors

$$\tilde{\nu}_{\max}(C_g) = m(g_1) \times \frac{1}{\rho} \frac{k_{\overline{g_1}} + \rho}{k_{\overline{g_2}} + \rho} \times \cdots \times \frac{1}{\rho} \frac{k_{\overline{g_{r-1}}} + \rho}{k_{\overline{g_r}} + \rho} = m(g_1) \times \frac{1}{\rho^{r-2}} \frac{k_{\overline{g_1}} + \rho}{k_{\overline{g_r}} + \rho} .$$

**Lemme 3.2.3.** *Les probabilités de transition de la mesure d'entropie maximale sont bien celles d'une mesure markovienne multiplicative.*



*Démonstration.* On a, lorsque  $\bar{x} \neq \bar{y}$ ,

$$p_{xy} = \frac{\rho^{-1}}{1 + \rho^{-1}k_{\bar{y}}} \times \frac{1}{1 - k_{\bar{x}} \frac{\rho^{-1}}{1 + \rho^{-1}k_{\bar{x}}}} ;$$

soit, en posant

$$\begin{aligned} r(x) &= \frac{\rho^{-1}}{1 + \rho^{-1}k_{\bar{x}}} , \\ p_{xy} &= \frac{r(y)}{1 - r(\Sigma_{\bar{x}})} . \end{aligned} \tag{3.5}$$

□

**Théorème 3.1.** *Lorsque  $q \geq 3$ , il existe une unique mesure extrémale pour  $\Sigma$ , donnée par*

$$\mu(x) = \frac{1}{\rho + k_{\bar{x}}} , \quad x \in \Sigma .$$

*Démonstration.* Lorsque  $q \geq 3$ ,  $\nu$  a les mêmes probabilités de transition que  $\tilde{\nu}_{\max}$  si et seulement si elle est markovienne multiplicative de probabilités de transition données par la Proposition 3.2.2, et donc, d'après la Proposition 3.1.1, de base donnée par (3.5). D'après le Théorème 3.1.1, cela est équivalent au fait que  $\mu$  vérifie les équations de trafic associées, qui deviennent dans ce cas :

$$\rho^{-1} = \mu(x) + \sum_{y \in \Sigma_{\bar{x}} \setminus \{x\}} \rho^{-1} \mu(y) + \sum_{y \notin \Sigma_{\bar{x}}} \rho^{-2} \mu(y) , \quad x \in \Sigma . \tag{3.6}$$

Si l'on fixe  $\alpha$  dans  $\{1, \dots, q\}$  et que l'on fait la somme sur les  $x$  tels que  $\bar{x} = \alpha$ , on obtient

$$k_{\alpha} \rho^{-1} = \mu(\Sigma_{\alpha}) + (k_{\alpha} - 1) \rho^{-1} \mu(\Sigma_{\alpha}) + k_{\alpha} \rho^{-2} (1 - \mu(\Sigma_{\alpha})) ;$$

puis

$$\mu(\Sigma_{\alpha}) = \frac{\rho^{-1} k_{\alpha}}{1 + \rho^{-1} k_{\alpha}} . \tag{3.7}$$

Or le système (3.6) peut s'écrire

$$\rho^{-1} = \mu(x) + \rho^{-1} (\mu(\Sigma_{\bar{x}}) - \mu(x)) + \rho^{-2} (1 - \mu(\Sigma_{\bar{x}})) , \quad x \in \Sigma ; \tag{3.8}$$

et en utilisant (3.7) il devient

$$\rho^{-1} = \mu(x) + \rho^{-1} \left( \frac{\rho^{-1} k_{\bar{x}}}{1 + \rho^{-1} k_{\bar{x}}} - \mu(x) \right) + \rho^{-2} \left( 1 - \frac{\rho^{-1} k_{\bar{x}}}{1 + \rho^{-1} k_{\bar{x}}} \right) , \quad x \in \Sigma ; \tag{3.9}$$

ce qui donne, après calcul

$$\mu(x) = \frac{1}{\rho + k_{\bar{x}}} , \quad x \in \Sigma .$$

□

Considérons maintenant le cas où  $q = 2$ . Pour  $i = 1, 2$ , on note  $U_{\Sigma_i}$  la probabilité uniforme sur  $\Sigma_i$ .

**Proposition 3.2.3.** *Lorsque  $q = 2$ , les mesures extrémales sont les mesures  $\mu$  de la forme  $\mu = tU_{\Sigma_1} + (1 - t)U_{\Sigma_2}$ ,  $t \in ]0, 1[$ .*

*Démonstration.* Dans ce cas, les probabilités de transition de la mesure d'entropie maximale sont uniquement caractérisées par le fait que, lorsque  $\bar{x} \neq \bar{y}$ ,  $p_{xy}$  est uniforme en  $y$ . Or si  $\mu$  est uniforme en restriction à chacun des deux  $\Sigma_i$ , pour des raisons de symétrie, les probabilités de transitions  $\nu_{xy}$  de la mesure harmonique,  $\bar{x} \neq \bar{y}$ , seront uniformes en  $y$  et ainsi la mesure harmonique aura bien les mêmes probabilités de transition que la mesure d'entropie maximale.

Vérifions que ces mesures  $\mu$  sont les seules à avoir cette propriété. Remarquons que, d'après l'expression (3.5), la base de la mesure d'entropie maximale est uniforme en restriction à  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ . Ainsi d'après la Proposition 3.1.1, les mesures markoviennes multiplicatives ayant une base du type  $\lambda U_{\Sigma_1} + (1 - \lambda)U_{\Sigma_2}$  ont les mêmes probabilités de transition que la mesure d'entropie maximale et ce sont les seules. Ainsi d'après le Théorème 3.1.1, si la mesure harmonique associée à une certaine mesure  $\mu$  a les mêmes probabilités de transition que la mesure d'entropie maximale, il existe  $\lambda \in ]0, 1[$  tel que, pour  $x \in \Sigma_1$ ,

$$\frac{\lambda}{k_1} = \mu(x)(1 - \lambda) + \sum_{y \in \Sigma_1 \setminus x} \mu(y) \frac{\lambda}{k_1} + \sum_{y \in \Sigma_2} \mu(y) \frac{\frac{1-\lambda}{k_2}}{\lambda} \frac{\lambda}{k_1} ;$$

et pour  $x \in \Sigma_2$ ,

$$\frac{1 - \lambda}{k_1} = \mu(x)\lambda + \sum_{y \in \Sigma_2 \setminus x} \mu(y) \frac{1 - \lambda}{k_2} + \sum_{y \in \Sigma_1} \mu(y) \frac{\frac{\lambda}{k_1}}{1 - \lambda} \frac{1 - \lambda}{k_2} .$$

La première équation peut se réécrire

$$\frac{\lambda}{k_1} = \mu(x)(1 - \lambda) + \frac{\lambda}{k_1}(\mu(\Sigma_1) - \mu(x)) + \frac{1 - \lambda}{k_1 k_2}(1 - \mu(\Sigma_1)) ;$$

c'est à dire

$$\mu(x) \left[ 1 - \lambda - \frac{\lambda}{k_1} \right] = \left[ 1 - \mu(\Sigma_1) \right] \left[ \frac{\lambda}{k_1} - \frac{1 - \lambda}{k_1 k_2} \right] . \quad (3.10)$$

On obtient une équation similaire pour  $x \in \Sigma_2$  en remplaçant  $\lambda$  par  $1 - \lambda$  et  $k_1$  par  $k_2$ . Si ces équations ont des solutions (ce qui dépend du paramètre  $\lambda$ ), la mesure  $\mu$  solution est nécessairement constante sur chaque  $\Sigma_i$ . □

**Remarque 3.2.1.** *On peut se demander pour quels paramètres  $\lambda$  il existe  $\mu$  telle que la base de la mesure harmonique associée soit  $\lambda U_{\Sigma_1} + (1 - \lambda)U_{\Sigma_2}$ . Remarquons que si la condition  $[1 - \lambda - \frac{\lambda}{k_1}] > 0$  est remplie ainsi que la condition symétrique  $[\lambda - \frac{1-\lambda}{k_2}] > 0$ , l'équation (3.10) donne bien une valeur strictement positive à  $\mu(x)$  pour  $x \in \Sigma_1$  (de même pour  $x \in \Sigma_2$ ). Ces deux conditions se traduisent par*

$$1 - \frac{k_2}{1 + k_2} < \lambda < \frac{k_1}{1 + k_1} ;$$

(on a bien toujours  $1 - \frac{k_2}{1+k_2} < \frac{k_1}{1+k_1}$ ). Si  $\lambda$  n'est pas dans cet intervalle, l'équation (3.10) n'admet pas de solution positive, et donc  $\lambda U_{\Sigma_1} + (1 - \lambda)U_{\Sigma_2}$  n'est pas la base d'une mesure harmonique.

### 3.3 Groupes fortement markoviens

Afin de démontrer le Lemme 3.2.2 qui relie la croissance du groupe au rayon spectral d'une matrice associée, on se place dans un cadre plus général, naturel pour cette propriété.

On suit la présentation du Chapitre 9 de [GdlH90].

**Définition 3.3.1.** Une grammaire de Markov  $\mathcal{G}$  est formée des trois ingrédients suivants :

- Un ensemble fini  $E$  d'états dont un élément particulier  $*$  est appelé état initial;
- Un ensemble fini d'arêtes  $A$  et deux applications  $\alpha : A \rightarrow E$  et  $\omega : A \rightarrow E$  (origine et extrémité);
- Un ensemble fini  $S$ , l'alphabet de  $\mathcal{G}$ , constitué de lettres et une application d'étiquetage  $\lambda : A \rightarrow S$ .

On appelle langage engendré par  $\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ , le sous-ensemble de l'ensemble  $\mathcal{L}$  des suites finies d'éléments de  $S$  formé des éléments  $(\lambda(a_1), \dots, \lambda(a_n))$ , où  $(a_1, \dots, a_n)$  vérifie :

- $\alpha(a_1) = *$ ;
- $\omega(a_i) = \alpha(a_{i+1})$  pour  $1 \leq i \leq n - 1$ .

Si  $G$  est un groupe de type fini et  $S$  un système fini symétrique de générateurs, on définit l'application

$$\pi \begin{cases} \mathcal{L} \rightarrow G \\ (s_1, \dots, s_n) \mapsto s_1 \cdots s_n \end{cases}$$

**Définition 3.3.2.** Soit  $G$  un groupe de type fini. On dit que  $G$  est un groupe de Markov s'il existe une grammaire  $\mathcal{G}$  dont l'alphabet  $S$  est un système de générateurs symétrique de  $G$ , et telle que la restriction de  $\pi$  à  $\mathcal{L}(\mathcal{G})$  est une bijection entre  $\mathcal{L}(\mathcal{G})$  et  $G$ .

**Définition 3.3.3.** Un groupe de type fini  $G$  est dit fortement Markov si, pour tout système fini  $S$  de générateurs de  $G$ , il existe une grammaire  $\mathcal{G}$  dont l'alphabet est  $S$ , telle que la restriction de  $\pi$  à  $\mathcal{L}(\mathcal{G})$  est une bijection et de plus préserve les longueurs naturelles.

Revenons momentanément au cadre des produits libres de groupes finis. Si l'on considère le système de générateurs  $\Sigma$ , on peut lui associer une grammaire de la façon suivante. En plus de  $*$ , l'ensemble des états  $E$  est formé de  $q$  éléments  $(e_1, \dots, e_q)$  (un pour chaque élément du produit libre). On ne met aucune arête d'un élément de  $E$  vers lui même; et d'un élément quelconque de  $E$  (y compris  $*$ ) vers un élément  $e_i$  différent, on met  $k_i$  arêtes étiquetées par les éléments de  $\Sigma_i$ . La restriction de  $\pi$  au langage engendré par cette grammaire est bien une bijection sur  $G$  et la longueur d'un mot de cette grammaire est bien égale à la taille (pour  $|\cdot|_\Sigma$ ) de l'élément de  $G$  correspondant.

De manière générale, les groupes hyperboliques sont fortement Markov (voir [GdlH90]). Un des intérêts de cette notion est de fournir un moyen d'estimer la croissance de ces groupes. Soit  $G$  un groupe fortement Markov muni d'un système fini symétrique de générateurs  $S$  et de la grammaire associée. On note

$$c_S(n) = \text{card}\{g \in G : |g|_S = n\} ;$$

et  $v_S$  la croissance de  $G$  muni de  $|\cdot|_S$ . Soit  $M$  la matrice dont les lignes et les colonnes sont indexées par  $E$ , avec, pour  $e$  et  $f$  dans  $E$ ,

$$M_{ef} = \text{card}\{\text{arêtes de } e \text{ à } f\} .$$

On a alors

$$c_S(n) = \sum_{e \in E} M_{*,e}^n .$$

Pour des raisons pratiques, on prend plutôt pour  $M$  la matrice définie de la même manière mais indexée par  $E \setminus \{*\}$ . On a alors

$$c_S(n) = \|M^{n-1}u_0\|_1 ;$$

où  $u_0$  est le vecteur indexé par  $E \setminus \{*\}$  avec

$$u_0(f) = \text{card}\{\text{arêtes de } * \text{ à } f\} .$$

On peut alors estimer  $v_S$  à l'aide de  $M$ .

**Proposition 3.3.1.** *Notons  $\rho$  le rayon spectral de la matrice  $M$ . On a*

$$v_S = \log \rho .$$

*Démonstration.* La matrice  $M$  est à termes positifs et irréductible. On peut alors appliquer le théorème de Perron-Frobenius. Soit  $u_\rho$  l'unique vecteur tel que  $Mu_\rho = \rho u_\rho$ . Décomposons  $u_0 = \lambda u_\rho + u'$ ,  $u'$  appartenant à l'espace invariant par  $M$  complémentaire de la droite engendrée par  $u_\rho$ . Une autre conséquence du théorème de Frobenius est que comme  $u_0$  est à termes positifs, la composante  $\lambda$  est strictement positive. On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|M^{n-1}u_0\|_1 = \log \rho ;$$

et on en déduit que l'on a également

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \text{card}\{g \in G : |g|_S \leq n\}}{n} = \log \rho .$$

□

**Remarque 3.3.1.** *Lorsque la matrice  $M$  est une matrice de sous-shift,  $\log \rho$  correspond à l'entropie topologique de ce sous-shift.*

Revenons à nouveau au cadre d'un produit libre de groupes finis, muni du système de générateurs  $\Sigma$ . Le langage que l'on a construit ci-dessus ne donne pas une matrice de sous-shift. Pour en obtenir une, il faut adapter ce langage en prenant pour espace des états la réunion de  $*$  et  $\Sigma$ . On relie alors par une arête les éléments de  $\Sigma$  qui ne sont pas dans le même  $\Sigma_i$ , et on étiquette cette arête par l'élément d'arrivée. On retombe bien alors sur la matrice introduite au chapitre précédent. On déduit alors le Lemme 3.2.2 de la proposition qui précède.

**Remarque 3.3.2.** *On ne peut pas espérer étendre de manière simple la méthode de la Section 3.2 à ce cadre plus général car on a utilisé de manière essentielle l'identification du bord avec un ensemble de mots infinis.*

### 3.4 Cas où l'ensemble générateur $S$ est quelconque

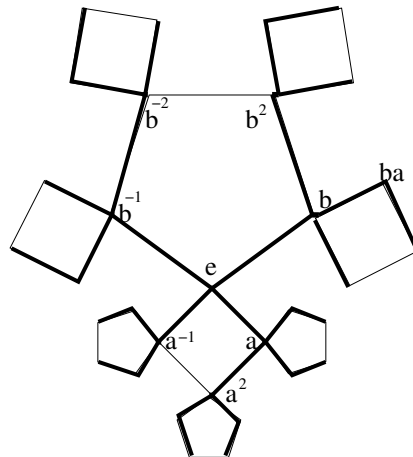
On se donne dans cette section un ensemble générateur  $S \subset \Sigma$  symétrique. On ne va pas obtenir un résultat complet comme dans le cas où  $S = \Sigma$ ; mais on va dans cette section montrer comment on peut étendre la méthode employée dans la Section 3.2.

Pour cela on veut, comme le suggère la Définition 3.3.3, définir une grammaire, dont l'ensemble des états sera  $\Sigma$ , et dont les arêtes seront étiquetées par des éléments de  $S$ ; de sorte que pour chaque élément  $g$  de  $G$ , il y ait un unique élément de  $\mathcal{L}(\mathcal{G})$  (un "chemin"), de longueur  $|g|_S$ , qui soit envoyé par  $\pi$  sur  $g$ .

Prenons tout d'abord l'exemple suivant :  $G = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ , avec  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \langle a \rangle$  et  $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \langle b \rangle$ . On prend  $S = \{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}$ . On met des arêtes entre :

- chaque élément de  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \setminus \{e\}$  et les éléments de longueur 1 de  $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \setminus \{e\}$  ( $b$  et  $b^{-1}$ ), étiquetée par l'élément d'arrivée;
- chaque élément de  $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \setminus \{e\}$  et les éléments de longueur 1 de  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \setminus \{e\}$  ( $a$  et  $a^{-1}$ ), étiquetée par l'élément d'arrivée;
- $a$  et  $a^2$ , étiquetée par  $a$ ;  $b$  et  $b^2$ , étiquetée par  $b$ ;  $b^{-1}$  et  $b^{-2}$ , étiquetée par  $b^{-1}$ .

On obtient bien ainsi un unique chemin pour joindre  $e$  à chaque élément de  $G$ ; et ce chemin a pour longueur  $|g|_S$ . En fait on obtient un arbre inclus dans le graphe de Cayley (par rapport à  $S$ ) de  $G$ , ce qu'illustre la figure qui suit.



En symbolisant par des 1 et des 0 les passages autorisés entre les éléments de  $\Sigma$ , on obtient la matrice de sous-shift suivante (en indexant par  $(a, a^{-1}, a^2, b, b^{-1}, b^2, b^{-2})$ ) :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On peut adapter ceci au cas général. L'espace des états est  $\Sigma$ . Soit  $\alpha$  un élément de  $\{1, \dots, q\}$ . On met une arête entre chaque élément de  $\Sigma_\alpha$  et tout élément de  $S \setminus S_\alpha$ , étiquetée par l'élément d'arrivée. Ce sont les seuls "passages" autorisés entre deux  $\Sigma_\alpha$  distincts. A l'intérieur d'un  $\Sigma_\alpha$ , la règle est un peu plus compliquée. On ordonne (arbitrairement) les éléments de  $S_\alpha$  :  $a_1, a_2 = a_1^{-1}, \dots, a_{2r-1}, a_{2r} = a_{2r-1}^{-1}$ . Soit maintenant  $b$  un élément de  $\Sigma_\alpha \setminus S_\alpha$  ;  $|b|$  est le nombre minimal de lettre de  $S_\alpha$  avec lequel on peut écrire  $b$ . Parmi ces écritures, on choisit l'écriture  $b = a_{i_1} \dots a_{i_l}$  la plus petite pour l'ordre lexicographique (vis à vis de l'ordre que l'on vient de choisir entre les lettres) ; et l'on met une arête de  $a_{i_1} \dots a_{i_{l-1}}$  à  $b = a_{i_1} \dots a_{i_l}$ , étiquetée par  $a_{i_l}$ .

On vérifie qu'il y a ainsi un et un seul chemin donnant chaque élément  $g$  de  $G$  et que la longueur de ce chemin est égale à la taille de  $g$  :  $|g|_S$ . De plus, il y a au plus une arête passant d'un élément à l'autre ; on obtient donc bien, par le procédé décrit sur l'exemple précédent, une matrice de sous-shift.

Précisons maintenant l'espace des trajectoires, noté  $R_S^\infty$ , associé au sous-shift que l'on a défini.

Ce n'est plus  $\Sigma^\infty$  car un élément  $\xi = \xi_1 \dots \xi_n \dots$  de  $\Sigma^\infty$  peut être obtenu via différentes trajectoires infinies : si on note  $\xi_l = s_1^l \dots s_{r_l}^l$  ( $s_i^l \in S$ ,  $|\xi_l|_S = r_l$ ), alors toutes les trajectoires  $s_1^1 \dots s_{r_1}^1 s_1^2 \dots s_{r_2}^2 \dots$ ,  $1 \leq i \leq r_1$ , conviennent (et ce sont les seules). On peut ainsi identifier  $R_S^\infty$  à l'ensemble des couples  $(\xi, i)$  de  $\Sigma^\infty \times \mathbb{N}^*$  vérifiant  $1 \leq i \leq |\xi_1|_S$ . On note  $\sigma_S$  le décalage. Avec la présentation ci-dessus, ce décalage prend la forme suivante :

$$\sigma_S(\xi, i) = \begin{cases} (\xi, i+1) & \text{si } i < |\xi_1| \\ (\sigma\xi, 1) & \text{si } i = |\xi_1| \end{cases}$$

On définit une distance sur  $R_S^\infty$  en posant, pour deux trajectoires  $s_\infty$  et  $s'_\infty$ ,

$$\tilde{\delta}_S(s_\infty, s'_\infty) = e^{-(s_\infty \wedge s'_\infty)},$$

$s_\infty \wedge s'_\infty$  désignant la longueur de leur partie initiale commune.

Dans ce cadre les Lemmes 3.2.1 et 3.2.2 restent valables :

**Lemme 3.4.1.** *Soit  $m$  une mesure de probabilité  $\sigma_S$ -invariante sur  $R_S^\infty$ . L'entropie de  $m$  pour le décalage (notée  $h_m$ ) est égale à la dimension de  $m$  ( $R_S^\infty$  étant muni de la distance  $\tilde{\delta}_S$ ).*

**Lemme 3.4.2.** *L'entropie topologique du sous-shift considéré est  $v_S$ .*

On se donne maintenant une mesure  $\mu$  portée par  $S$ . On a besoin d'un ingrédient supplémentaire pour relier la mesure harmonique  $\nu$  à une mesure  $\sigma_S$ -invariante sur  $R_S^\infty$ . Pour cela, on remarque que le décalage  $\sigma_S$  sur  $R_S^\infty$  est en fait une suspension du décalage  $\sigma$  sur  $\Sigma^\infty$ . On a alors :

**Lemme 3.4.3.** *Les formules*

$$m^S(C_{[\xi]_n} \times \{i\}) = \frac{m(C_{[\xi]_n})}{\sum_{x \in \Sigma} |x| m(C_x)}$$

et

$$m(C_{[\xi]_n}) = \frac{m^S(C_{[\xi]_n} \times \{1\})}{\sum_{x \in \Sigma} m^S(C_x \times \{1\})}$$

*établissent une correspondance bijective entre l'espace des probabilités  $\sigma$ -invariantes sur  $\Sigma^\infty$  et celui des probabilités  $\sigma_S$ -invariantes sur  $R_S^\infty$ .*

Il est de plus important de remarquer que, vues les formules reliant  $m$  à  $m^S$ , ces deux mesures ont même dimension (pour  $\delta_S$  et  $\tilde{\delta}_S$ ).

Ainsi à la mesure markovienne  $\nu$  sur  $\Sigma^\infty$  on peut associer une mesure  $\sigma$ -invariante sur  $\Sigma^\infty$  équivalente à  $\nu$  puis, à l'aide du lemme précédent, une mesure  $\tilde{\nu}$   $\sigma_S$ -invariante sur  $R_S^\infty$  qui a la même dimension que  $\nu$ . On obtient alors, comme dans la Section 3.2 la proposition suivante :

**Proposition 3.4.1.** *La mesure  $\mu$  portée par  $S$  est extrémale si et seulement si la mesure  $\tilde{\nu}$  associée à  $\nu$  est la mesure d'entropie maximale du sous-shift associé à  $S$ .*

Les calculs dans ce cas n'aboutissent pas à des expressions simples comme dans la section 3.2.

# Chapitre 4

## Marche aléatoire sur un groupe semi-simple : estimation de la dimension de la mesure harmonique

Dans ce chapitre on considère une marche aléatoire sur  $SL(d, \mathbb{R})$  ( $d > 2$ ). On cherche à estimer la dimension de la mesure harmonique, ou plutôt la dimension de mesures stationnaires sur certains quotients de la frontière de Poisson, en fonction de l'entropie asymptotique (ou de l'entropie associée à ces mêmes  $\mu$ -frontières par la formule (1.2)) et du vecteur des exposants de la marche. On étend également les résultats à certains groupes de Lie réels semi-simples.

Dans la première partie du chapitre on rappelle ce dont on aura besoin sur les groupes semi-simples, les espaces symétriques ; on se place dans cette partie dans un cadre très général, dans lequel s'énonce le théorème sur le comportement asymptotique de la marche aléatoire ([Kai89] pour cette présentation). Ensuite on se restreint à  $SL(d, \mathbb{R})$  pour démontrer le résultat principal de ce chapitre ; puis on regarde dans quelle mesure l'on peut l'étendre à des groupes plus généraux.

### 4.1 Préliminaires et notations

On se donne pour cette section un groupe de Lie réel  $G$  semi-simple connexe à centre fini, sans facteur compact.

#### 4.1.1 Généralités

On note  $\mathfrak{g}$  l'algèbre de Lie de  $G$ ,  $ad$  sa représentation adjointe,  $\exp$  l'application exponentielle de  $\mathfrak{g}$  dans  $G$ . Soit  $\theta$  une involution de Cartan de  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$  la décomposition de Cartan associée :  $\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} : \theta(X) = X\}$  et  $\mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g} : \theta(X) = -X\}$ . Soit  $K = \exp(\mathfrak{k})$  ; c'est un sous-groupe compact maximal  $K$  de  $G$ . Pour des précisions sur ces faits généraux et ce qui suit, on peut voir par exemple [Hel78].



## Racines, chambres de Weyl

Soit  $\mathfrak{a}$  un sous-espace commutatif maximal de  $\mathfrak{p}$ . On pose, pour  $\alpha$  dans  $\mathfrak{a}^*$ ,

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} : \forall Y \in \mathfrak{a}, [Y, X] = \alpha(Y)X\} .$$

L'ensemble  $\Sigma = \{\alpha \neq 0 : \mathfrak{g}_\alpha \neq 0\}$  est appelé système de racines restreintes de  $\mathfrak{g}$ . Notons  $\mathfrak{m}$  le centralisateur de  $\mathfrak{a}$  dans  $\mathfrak{k}$  et  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{m} + \mathfrak{a}$ . On a alors la décomposition suivante de  $\mathfrak{g}$  :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 + \sum_{\alpha \in \Sigma} \mathfrak{g}_\alpha .$$

Chacune des racines s'annule sur un hyperplan de  $\mathfrak{a}$ . On appelle chambres de Weyl de  $\mathfrak{a}$  les parties connexes de  $\mathfrak{a}$  privé de ces hyperplans. On se fixe une de ces chambres noté  $\mathfrak{a}^+$ . Une racine  $\alpha$  est alors dite positive si elle est positive sur  $\mathfrak{a}^+$ . Un élément de  $\mathfrak{a}$  est dit régulier s'il est contenu dans une chambre de Weyl, c'est à dire s'il n'annule aucune des racines. On dit que deux chambres de Weyl sont en opposition si toute racine positive sur l'une est négative sur l'autre.

Le groupe  $W$  engendré par les symétries par rapport à ces hyperplans est appelé le groupe de Weyl (on parle ici de symétries orthogonales par rapport au produit scalaire associé à la forme de Killing sur  $\mathfrak{a}$ ). Vue sa définition, il agit transitivement sur les chambres de Weyl. On peut préciser sa structure : il est le quotient du normalisateur de  $A = \exp(\mathfrak{a})$  dans  $K$  par son centralisateur  $M = \exp(\mathfrak{m})$ .

Une racine positive est dite simple si elle ne peut pas s'écrire comme la somme de deux racines positives. L'ensemble  $\Delta$  (qui dépend du choix de  $\mathfrak{a}^+$ ) des racines simples forme une base de  $\Sigma$  au sens où :

- les éléments de  $\Delta$  forment une base de  $\mathfrak{a}^*$
- toute racine  $\beta \in R$  s'écrit  $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} m_\alpha \alpha$ , où les  $m_\alpha$  sont des entiers qui sont soit tous positifs, soit tous négatifs.

Remarquons qu'alors

$$\mathfrak{a}^+ = \{X \in \mathfrak{a} : \forall \alpha \in \Delta, \alpha(X) > 0\} . \quad (4.1)$$

Explicitons tout ceci dans le cas de  $SL(d, \mathbb{R})$ . L'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  est alors l'ensemble des matrices à trace nulle,  $K = SO(d)$ ,  $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$  est l'ensemble des matrices symétriques et on choisit pour  $\mathfrak{a}$  l'ensemble des matrices diagonales à trace nulle. Si l'on note  $\epsilon_i$  l'application qui à un élément de  $\mathfrak{a}$  associe le  $i^{eme}$  coefficient de la diagonale, les racines sont de la forme  $\epsilon_i - \epsilon_j$ . On choisit le système de racines positif suivant :

$$R^+ = \{\epsilon_j - \epsilon_i : j < i\} ;$$

l'ensemble des racines simples est alors

$$\Delta = \{\epsilon_i - \epsilon_{i+1} : i = 1, \dots, d-1\} .$$

On peut représenter le groupe de Weyl par les matrices de permutation ( $M$  est l'ensemble des matrices diagonales dont les coefficients valent 1 ou  $-1$ ).

## Décomposition polaire

Notons  $A^+ = \exp(\mathfrak{a}^+)$ . Le groupe  $G$  admet alors la décomposition suivante (décomposition polaire) :

$$G = K\overline{A^+}K .$$

Etant donné  $g$  dans  $G$ , on notera par la suite  $r(g)$  l'élément de  $\mathfrak{a}^+$  tel que la décomposition polaire de  $g$  soit  $g = k \exp(r(g))k'$ .

## Décomposition d'Iwasawa

On note

$$\mathfrak{n} = \sum_{\alpha \in \Sigma^+} \mathfrak{g}_\alpha ;$$

c'est une algèbre de Lie nilpotente. Puis on pose  $N = \exp(\mathfrak{n})$  et  $A = \exp(\mathfrak{a})$ . Chaque élément  $g$  de  $G$  peut alors s'écrire  $g = kan$ , avec  $k \in K$ ,  $a \in A$  et  $n \in N$ . Cette décomposition  $G = KAN$  est appelée décomposition d'Iwasawa de  $G$ . On note également  $P := MAN$ ,  $M = \exp(\mathfrak{m})$  étant le centralisateur de  $A$  dans  $K$ .

### 4.1.2 Espace symétrique

On garde les notations qui précèdent.

#### Définition

On peut munir le quotient  $S = G/K$  d'une métrique riemannienne  $d$  telle que  $G$  agisse de manière isométrique sur l'espace  $(S, d)$  (voir [Ebe96]). On note  $o$  la classe de l'identité dans  $G/K$ . La métrique  $d$  est définie à partir de la forme de Killing  $B$  sur  $\mathfrak{g}$  :

$$B(X, Y) = \text{trace}(ad(X)ad(Y)) .$$

L'espace tangent à  $S$  en  $o$  s'identifie au sous-espace  $\mathfrak{p}$  ; en restriction à  $\mathfrak{p}$ ,  $B$  est un produit scalaire ; et la structure riemannienne est définie en translatant ce produit scalaire sur  $S$ . La distance entre  $o$  et  $go$  est alors égale à  $\|r(g)\|$ , la norme étant celle associée à la forme de Killing. Le groupe  $G$  hérite une jauge de cette distance :  $|g| = d(o, go)$ .

Dans le cas de  $SL(d, \mathbb{R})$ , la forme de Killing  $B$  est donnée par

$$B(X, Y) = 2d \text{ trace}(XY) .$$

On a alors, si  $g = k \exp(r(g))k'$ , en notant  $\exp(r(g)) = \text{diag}(r_1, \dots, r_d)$ ,

$$d(o, go) = \left( 2d \sum_{i=1}^d (\log r_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} .$$

## Bord de visibilité, ensemble limite

L'espace symétrique  $S$  étant de courbure sectionnelle négative ou nulle, on peut construire une compactification de  $S$  par la sphère de visibilité ([Ebe96])  $\partial S$  en définissant celle-ci de la manière suivante : deux rayons géodésiques sont dits équivalents lorsqu'ils restent à une distance bornée l'un de l'autre ;  $\partial S$  est alors le quotient de l'ensemble des rayons géodésiques par cette relation d'équivalence. La sphère de visibilité s'identifie en fait à la sphère unité de l'espace tangent en  $o$  à  $S$  en faisant correspondre à chaque élément  $\xi$  de  $\partial S$  le vecteur de norme 1 tangent en  $o$  au rayon géodésique partant de  $o$  et se trouvant dans la classe de  $\xi$ . Une suite  $(x_n)$  d'éléments de  $S$  converge alors vers un élément  $\xi$  de  $\partial S$  si d'une part  $d(o, x_n)$  tend vers l'infini et d'autre part le vecteur directeur du segment géodésique reliant  $o$  à  $x_n$  converge vers celui du rayon reliant  $o$  à  $\xi$ .

Décrivons plus précisément ce bord de visibilité. Pour  $H \in \mathfrak{a}$ , on note

$$\xi_H = \lim_{t \rightarrow +\infty} \exp tH .$$

Le bord  $\partial S$  est alors la réunion,  $H$  parcourant  $\mathfrak{a}$ , des orbites  $G\xi_H$ . Si l'on considère la réunion de ces orbites lorsque  $H \in \mathfrak{a}^+$ , on obtient l'ensemble  $\partial S^{reg}$  des éléments réguliers du bord ; l'union est alors disjointe. Le stabilisateur d'un élément de  $\partial S^{reg}$  est isomorphe à  $P$ . Chaque orbite  $G\xi_H$ ,  $H \in \mathfrak{a}^+$ , est donc isomorphe à  $G/P$ . Soulignons par ailleurs que  $K$  agit transitivement sur ces orbites.

Soit  $\Gamma$  un sous-groupe discret de  $G$ . On définit l'ensemble limite de  $\Gamma$  dans la compactification de visibilité de la manière suivante :

$$L_\Gamma = \overline{Go} \cap \partial S .$$

Comme on l'a vu précédemment,  $\partial S^{reg}$  est en fait égal au produit  $\mathfrak{a}^+ \times G/P$ . Dans [Ben97], il est montré que pour  $H \in \mathfrak{a}^+$ ,  $G\xi_H \cap L_\Gamma$  est soit vide, soit égal à un sous-ensemble  $\Lambda_\Gamma$  de  $G/P$ , qui ne dépend pas de  $H \in \mathfrak{a}^+$  : l'ensemble limite est lui même le produit d'un sous-ensemble connexe de  $\mathfrak{a}^+$  et de  $\Lambda_\Gamma$ .

### 4.1.3 Comportement asymptotique de la marche et frontière de Poisson

On se donne une mesure de probabilité  $\mu$  dont le support engendre en tant que semi-groupe un sous-groupe discret  $\Gamma$  de  $G$  et on suppose que  $\mu$  possède un moment d'ordre 1, c'est à dire

$$\sum_{g \in G} \mu(g) d(o, go) < \infty .$$

On sait alors caractériser le comportement asymptotique de la marche aléatoire grâce au théorème d'Osseledets ; on sait également décrire sa frontière de Poisson ([Kai85], [Led85]). On adopte ici la présentation, utilisant la géométrie des espaces symétriques, introduite dans [Kai89] (voir aussi [Kai00]).

La suite  $(r(x_n)/n)$  converge vers un élément  $\rho_\mu$  de  $\overline{\mathfrak{a}^+}$ , appelé le vecteur des exposants de Liapunov. Le comportement de la marche aléatoire est alors décrit par

la propriété suivante : pour  $\mathbb{P}$ -presque toute trajectoire  $\mathbf{x}$ , il existe  $g$  dans  $G$  tel que

$$d(x_n o, g \exp(\rho_\mu n) o) = o(n) . \quad (4.2)$$

Si  $\rho_\mu \neq 0$ , les trajectoires  $(x_n o)_{n \geq 0}$  convergent alors presque sûrement vers un élément  $x_\infty$  du bord de visibilité  $\partial S$  de  $S$ . Plus précisément, les trajectoires convergent vers des éléments de l'orbite de  $\xi_{\rho_\mu}$  sous  $G$ . Dans ce cas,  $G\xi_{\rho_\mu}$  muni de la distribution  $\nu$  de  $x_\infty$  est isomorphe à la frontière de Poisson, que l'on notera  $(\mathcal{B}, \nu)$ . De plus, si l'on note  $P_\mu$  le groupe laissant fixe  $\xi_{\rho_\mu}$  (un sous-groupe parabolique), alors  $G\xi_{\rho_\mu} \simeq G/P_\mu$ . En définissant une application  $bnd$  de l'espace des trajectoires vers  $G/P_\mu$  qui à  $\mathbf{x}$  associe la classe d'un élément  $g$  vérifiant la relation (4.2), on a  $\nu = bnd(\mathbb{P})$ . De plus, comme  $K$  agit transitivement sur  $G\xi_{\rho_\mu}$ , on peut transformer la relation précédente en : il existe  $k \in K$  tel que

$$d(x_n o, (k \exp(\rho_\mu) k^{-1})^n o) = o(n) . \quad (4.3)$$

On supposera de plus par la suite que  $G$  est un groupe linéaire algébrique. Si le sous-groupe  $\Gamma$  est Zariski-dense, alors  $\rho_\mu$  est dans  $\mathfrak{a}^+$  ([GM89]) : les exposants sont séparés. Le sous-groupe  $P_\mu$  est alors égal à  $P$  (un sous-groupe parabolique minimal). Remarquons qu'une hypothèse plus faible que la Zariski-densité, hypothèse que l'on peut faire sans se placer dans le cadre des groupes linéaires algébriques, assure également que les exposants sont séparés ([GR85]). Pour des raisons pratiques (et parce qu'on aura à nouveau besoin de la Zariski-densité au Chapitre 5), on se placera néanmoins dans ce cadre.

Dans le cas où  $G = SL(d, \mathbb{R})$ ,  $P$  est le groupe des matrices triangulaires supérieures et  $SL(d, \mathbb{R})/P$  est isomorphe à l'espace des drapeaux complets. Si le sous-groupe  $\Gamma$  n'est pas Zariski-dense, la frontière de Poisson est isomorphe à un quotient (pas forcément strict) de cet espace des drapeaux complets.

#### 4.1.4 Compactifications de Furstenberg

L'ensemble limite dans la compactification de visibilité  $L_\Gamma$  n'est pas très adapté à notre problème car on a vu que les trajectoires de la marche aléatoire convergeaient vers des éléments d'une seule orbite  $G\xi \subset L_\Gamma$ . On suppose pour la suite que  $\Gamma$  est Zariski-dense. Si l'on identifie  $\partial S^{reg}$  au produit  $\mathfrak{a}^+ \times G/P$ , le support de la mesure harmonique est donc contenu dans l'ensemble  $\{\rho_\mu\} \times \Lambda_\Gamma$ . On va envisager des compactifications plus adaptées au problème.

On appelle sous-groupe parabolique standard tout sous-groupe fermé de  $G$  contenant  $P$ . Si  $P'$  est un tel sous groupe, la mesure harmonique  $\nu$  sur  $G/P$  se projète en une mesure  $\nu'$   $\mu$ -stationnaire sur  $G/P'$ . On va définir un ensemble limite de  $\Gamma$  dans  $G/P'$ . L'espace  $X = G/P'$  est muni de la mesure de Haar ( $K$ -invariante) notée  $m$ . On envoie  $S$  dans l'ensemble  $Proba(X)$  des mesures de probabilité sur  $X$  en associant à  $s = go \in S$  la mesure  $gm$ . L'espace  $Proba(X)$  est compact en topologie faible et il contient  $X$ , identifié aux mesures de Dirac.

**Définition 4.1.1.** *Lorsque l'application définie précédemment qui envoie  $S$  dans  $Proba(X)$  est injective, on appelle compactification de Furstenberg relativement à  $X$*

de  $S$  l'adhérence, pour la topologie définie précédemment, de  $S$  dans  $\mathcal{P}(X)$ . On la note  $\overline{S}^X$ .

Dans [GJT98] (ch. 4), les conditions de l'injectivité de cette application sont discutées. La marche aléatoire converge également dans ces compactifications, vers des éléments de  $X$  (voir [GR85]); on définit alors :

**Définition 4.1.2.** ([Gui90]) On appelle ensemble limite d'un sous-groupe  $\Gamma$  dans  $X = G/P'$  la partie fermée de  $X$  définie par

$$\Lambda_\Gamma^X = \overline{\Gamma \cdot o} \cap X .$$

Si  $X = G/P$ , on retrouve l'ensemble  $\Lambda_\Gamma$  défini précédemment ; et les  $\Lambda_\Gamma^X$  sont les projetés de  $\Lambda_\Gamma$ . Parmi les propriétés des projetées  $\nu'$  de  $\nu$ , citons la suivante ([GM89]) : on peut plonger  $X$  dans un espace projectif et dans celui-ci,  $\nu'$  ne charge aucun sous-ensemble algébrique strict. En particulier  $\nu'$  ne charge aucun point. Les propriétés géométriques de l'action de  $G$  sur  $G/P'$  entraînent également que la mesure  $\nu'$  est l'unique mesure  $\mu$ -stationnaire sur  $G/P'$ . Ce sont ces  $\mu$ -frontières avec lesquelles on va travailler (en pratique les grassmanniennes dans la section 4.2 ainsi que l'espace projectif dans la partie 5.1.3). Une autre propriété des ensembles limites sera importante par la suite :

**Proposition 4.1.1.** ([Gui90]) Supposons le sous-groupe  $\Gamma$  Zariski-dense. Alors  $\Gamma$  agit de manière minimale sur  $\Lambda_\Gamma^X$ .

On se servira de ce résultat sous la forme suivante :

**Corollaire 4.1.1.** Supposons le sous-groupe  $\Gamma$  Zariski-dense. Soit  $U$  un ouvert de  $X$  tel que  $U \cap \Lambda_\Gamma^X \neq \emptyset$ . Alors il existe des éléments  $\gamma_1, \dots, \gamma_r$  de  $\Gamma$  tels que

$$\Lambda_\Gamma^X \subset \bigcup_i \gamma_i U .$$

*Démonstration.* L'ensemble  $\bigcup_{g \in \Gamma} gU$  est un ouvert  $\Gamma$ -invariant. Son complémentaire est donc un compact  $\Gamma$ -invariant et vue l'hypothèse  $U \cap \Lambda_\Gamma^X \neq \emptyset$ , il ne contient pas  $\Lambda_\Gamma^X$ . Comme  $\Lambda_\Gamma^X$  est minimal, l'intersection de  $(\bigcup_{g \in \Gamma} gU)^C$  avec  $\Lambda_\Gamma^X$  est donc vide et on a

$$\Lambda_\Gamma^X \subset \bigcup_{g \in \Gamma} gU .$$

Comme  $\Lambda_\Gamma^X$  est compact, on peut extraire un sous-recouvrement fini. □

Comme on va s'intéresser à la dimension de la mesure harmonique, dont le support est l'ensemble limite, une question naturelle se pose : peut-on connaître la dimension de  $\Lambda_\Gamma$  ? Un cas où l'on peut dire quelque chose est celui des réseaux : l'ensemble limite est alors  $G/P$  tout entier. Par ailleurs, il est démontré dans [Gui90] que si  $\Gamma$  est Zariski-dense, la dimension de  $\Lambda_\Gamma$  est strictement positive.

En rang 1, si  $\Gamma$  est convexe-cocompact, cette dimension est égale à l'exposant de croissance du groupe. En rang supérieur, on peut adapter ce résultat. Pour chaque  $H \in \mathfrak{a}^+$ , on définit l'exposant de croissance dans la direction de  $H$  :  $v_H(\Gamma)$  ; on définit

également un sous-ensemble de l'ensemble limite appelé ensemble limite radial  $L_\Gamma^{rad}$  (voir [Lin04]). Il est alors démontré dans [Lin04] que l'on a l'estimation suivante de la dimension de Hausdorff :

$$\dim_{Hd}(L_\Gamma^{rad} \cap G\xi_H) \leq v_H(\Gamma) ;$$

avec égalité sous certaines conditions. Cependant cette dimension de Hausdorff n'est pas celle relative à la distance que l'on va utiliser par la suite mais à un système de "boules" défini d'une autre manière (voir [Lin04]).

**Questions :** Peut-on établir un lien entre ces deux notions de dimensions ? L'ensemble limite radial est-il de  $\nu$ -mesure pleine ?

**Remarque 4.1.1.** *On doit pouvoir préciser dans ce cas l'inégalité  $h \leq lv$  et montrer que  $h \leq lv_{\rho_\mu}(\Gamma)$ .*

## 4.2 Lien entre $h$ , les exposants et la dimension de $\nu$ : cas de $SL(d, \mathbb{R})$

On se donne un sous-groupe discret  $\Gamma$  de  $G = SL(d, \mathbb{R})$ , Zarisky-dense, ainsi qu'une mesure  $\mu$  dont le support engendre  $\Gamma$  en tant que semi-groupe et qui admet un moment d'ordre 1. On note  $\Lambda = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_d})$  la matrice diagonale des exposants de Liapunov ("exp( $\rho_\mu$ )" dans (4.3)). On adapte ici la démarche utilisée en rang 1 dans [Led83].

### 4.2.1 Minoration de $h$

On fait tout d'abord une remarque simple : en utilisant la  $\mu$ -stationnarité de la mesure  $\nu$ , on a, si  $\nu(C) > 0$ ,

$$\nu(x_n C) = \sum_g \mu^n(g) g\nu(x_n C) ;$$

et donc

$$\nu(x_n C) \geq \mu^n(x_n) x_n \nu(x_n C) = \mu^n(x_n) \nu(C) .$$

Ainsi on a

$$-\frac{1}{n} \log \nu(x_n C) \leq -\frac{1}{n} \log \mu^n(x_n) - \frac{1}{n} \log \nu(C) ;$$

et en faisant tendre  $n$  vers l'infini on obtient

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \nu(x_n C) \leq h . \quad (4.4)$$

On va avoir besoin de regarder l'action de la marche sur la grassmanienne des sous-espaces vectoriels de rang  $i$ , notée  $\mathcal{B}_i$ ,  $i$  étant compris entre 1 et  $d$ . On a une projection naturelle  $\pi_i$  de l'espace des drapeaux complets  $G/P$  sur celle-ci. Plus précisément, on identifie  $\mathcal{B}_i$  à une partie de l'espace projectif  $\mathcal{P}(\bigwedge_i \mathbb{R}^d)$ . On ne prend pas en fait pour  $\pi_i$  la projection naturelle mais la suivante. Notons

$$v_0 = e_{d-i+1} \wedge \dots \wedge e_d$$

et  $\bar{g}$  la classe d'un élément  $g$  de  $G$  dans  $\mathcal{B}$ . Alors si  $p \in P$ ,  $(p^{-1})^t \bar{v}_0 = \bar{v}_0$ ; et on peut donc poser

$$\pi_i(\bar{g}) = ((g^{-1})^t)^{\wedge^i} \bar{v}_0 .$$

Le groupe  $G$  agit ainsi de manière naturelle sur les sous-espaces de rang  $i$  et  $\pi_i$  est équivariante; on récupère donc une mesure  $\nu^i = \pi_i(\nu)$  sur  $\mathcal{B}_i$ , et celle-ci est  $\mu$ -stationnaire. Par conséquent, on peut dans l'équation (4.4) remplacer  $\nu$  par  $\nu^i$ . On aura en fait besoin de cette équation sous une forme un peu différente.

**Lemme 4.2.1.** *On a la minoration suivante de l'entropie asymptotique :*

$$h \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \check{\nu}^i(x_n^{-1}C) ; \quad (4.5)$$

ceci étant vérifié pour presque toute trajectoire  $\mathbf{x}$  et pour tout  $C \subset \mathcal{B}_i$  tel que  $\check{\nu}^i(C) > 0$ .

*Démonstration.* Il suffit de reprendre le calcul fait au début de cette section en utilisant l'équation de stationnarité de  $\check{\nu}$  pour écrire :

$$\check{\nu}^i(x_n^{-1}C) = \sum_g \mu^n(g) g^{-1} \check{\nu}^i(x_n^{-1}C) .$$

□

Afin de relier  $h$  et la dimension de  $\nu^i$ , on va maintenant relier ces ensembles  $x_n^{-1}C$  à des boules dans  $\mathcal{B}_i$ .

**Proposition 4.2.1.** *Quel que soit  $\epsilon > 0$ , pour presque toute trajectoire  $\mathbf{x}$ , il existe un entier  $N$  et un ensemble de  $\check{\nu}^i$ -mesure non nulle  $C$  tels que pour tout  $n \geq N$  on ait*

$$x_n^{-1}C \subset B(x_n^{-1}\pi_i(bnd(\mathbf{x})), e^{-n(\lambda_{d-i}-\lambda_{d-i+1}-2\epsilon)}) .$$

*Démonstration.* On fixe une trajectoire  $\mathbf{x}$  dans l'ensemble de mesure 1 où les relations (4.3) et (4.5) sont vérifiées. On a alors

$$d(x_n o, (k\Lambda k^{-1})^n o) = o(n) ;$$

et donc

$$(x_n^{-1}(k\Lambda k^{-1})^n)^{\wedge^i} = d_n , \quad \text{avec} \quad \log \|d_n\| = o(n) . \quad (4.6)$$

Rappelons que l'on a défini la fonction  $bnd$  dans la partie 4.1.3; avec les notations ci-dessus,  $bnd(\mathbf{x})$  est la classe de  $k$  dans  $G/P$ . Posons  $v = k^{\wedge^i} v_0$ ; on a alors

$$\pi_i(bnd(\mathbf{x})) = ((k^{-1})^t)^{\wedge^i} \bar{v}_0 = \bar{v} .$$

En utilisant l'expression de  $x_n^{-1}$  de l'équation (4.6), on obtient (on note maintenant l'action de  $G$  sur  $\bigwedge_i \mathbb{R}^d$  sans  $^{\wedge^i}$ ) :

$$x_n^{-1}v = d_n k \Lambda^{-n} v_0 .$$

Or dans le groupe linéaire de  $\bigwedge_i \mathbb{R}^d$ , la matrice  $\Lambda$  devient :

$$\Lambda^{\wedge i} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} e^{\lambda_2} \dots e^{\lambda_i} & & & \\ & \ddots & & \\ & & e^{\lambda_{d-i}} e^{\lambda_{d-i+2}} \dots e^{\lambda_d} & \\ & & e^{\lambda_{d-i+1}} \dots e^{\lambda_d} & \end{pmatrix},$$

et par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \|x_n^{-1} v\|}{n} = -(\lambda_{d-i+1} + \dots + \lambda_d) ;$$

et, lorsque  $u \in v^\perp$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \|x_n^{-1} u\|}{n} \leq -(\lambda_{d-i} + \lambda_{d-i+2} + \dots + \lambda_d) .$$

On prend la distance suivante sur  $\mathcal{P}(\bigwedge_i \mathbb{R}^d)$  : si  $\overline{w_1}$  et  $\overline{w_2}$  sont dans  $\mathcal{P}(\bigwedge_i \mathbb{R}^d)$ ,

$$\delta(\overline{w_1}, \overline{w_2}) = |\sin(\angle(w_1, w_2))| ;$$

la notation  $\angle(w_1, w_2)$  désignant la mesure de l'angle entre les droites engendrées par les deux vecteurs (voir aussi section 6.3). Soit alors  $w = \beta v + u$  de norme 1 dans  $\bigwedge_i \mathbb{R}^d$  avec  $\beta$  non nul et  $u \in v^\perp$ . On a

$$\tan(\angle(x_n^{-1} v, x_n^{-1} w)) \leq \frac{\|x_n^{-1} u\|}{\|\beta x_n^{-1} v\| - \|x_n^{-1} u\|} ;$$

et donc

$$\frac{\tan(\angle(x_n^{-1} v, x_n^{-1} w))}{1 + \tan(\angle(x_n^{-1} v, x_n^{-1} w))} \leq \frac{1}{|\beta|} \frac{\|x_n^{-1} u\|}{\|x_n^{-1} v\|} .$$

Ainsi quel que soit  $\epsilon$ , si  $n$  est assez grand

$$\begin{aligned} \frac{\tan(\angle(x_n^{-1} v, x_n^{-1} w))}{1 + \tan(\angle(x_n^{-1} v, x_n^{-1} w))} &\leq \frac{1}{|\beta|} \frac{e^{-n(\lambda_{d-i} + \lambda_{d-i+2} + \dots + \lambda_d - \epsilon)}}{e^{-n(\lambda_{d-i+1} + \dots + \lambda_d + \epsilon)}} \\ &\leq \frac{1}{|\beta|} e^{-n(\lambda_{d-i} - \lambda_{d-i+1} - 2\epsilon)} ; \end{aligned}$$

et donc

$$\delta(\pi_i(bnd(\mathbf{x})), x_n^{-1} \overline{w}) = \delta(x_n^{-1} \overline{v}, x_n^{-1} \overline{w}) \leq \frac{M}{|\beta|} e^{-n(\lambda_{d-i} - \lambda_{d-i+1} - 2\epsilon)} ;$$

où  $M$  est une constante apparaissant dans la comparaison en 0 des fonctions  $\frac{\tan}{1+\tan}$  et  $\sin$ .

Comme on a supposé le sous-groupe  $\Gamma$  Zariski-dense, on sait que  $\check{\nu}^i$  ne charge aucun point ; donc on peut trouver un ensemble  $C$  de mesure strictement positive sur lequel  $|\beta|$  est plus grand qu'une constante.  $\square$



La conséquence de la proposition précédente est que l'on a pour presque toute trajectoire  $\mathbf{x}$

$$h \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \check{\nu}^i B(x_n^{-1} \pi_i(bnd(\mathbf{x})), e^{-n(\lambda_{d-i} - \lambda_{d-i+1} - 2\epsilon)}) .$$

Le choix de translater des ensembles par  $x_n^{-1}$  plutôt que par  $x_n$  peut paraître arbitraire. Il s'explique par le lemme qui suit.

**Lemme 4.2.2.** *La variable aléatoire  $x_n^{-1} \pi_i(bnd(\mathbf{x}))$  a pour distribution  $\nu^i$ .*

*Démonstration.* Rappelons que  $\pi_i$  et  $bnd$  sont  $G$ -équivariante. De plus, on remarque que  $T^n x_n^{-1} \mathbf{x} = U^n \mathbf{x}$ ; donc  $bnd(x_n^{-1} \mathbf{x}) = bnd(U^n \mathbf{x})$ . On a donc

$$x_n^{-1} \pi_i(bnd(\mathbf{x})) = \pi_i(bnd(U^n \mathbf{x})) ;$$

On conclut en utilisant le fait que  $\mathbb{P}$  est invariante sous  $U$ . □

**Corollaire 4.2.1.** *Quels que soient  $\eta > 0$  et  $\chi > 0$ , il existe  $\delta_0$  tel que si  $\delta < \delta_0$ ,*

$$\nu^i \left\{ t : \frac{\log \check{\nu}^i B(t, \delta)}{\log \delta} \leq \frac{h}{\lambda_{d-i} - \lambda_{d-i+1}} + \eta \right\} \geq 1 - \chi .$$

*Démonstration.* Un  $\epsilon > 0$  étant fixé, notons

$$A = \left\{ \mathbf{x} : \limsup_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \check{\nu}^i B(x_n^{-1} \pi_i(bnd(\mathbf{x})), e^{-n(\lambda_{d-i} - \lambda_{d-i+1} - 2\epsilon)}) \leq h \right\} ;$$

et pour  $\eta > 0$ ,

$$A_\eta = \left\{ \mathbf{x} : \exists N, \forall n \geq N, -\frac{1}{n} \log \check{\nu}^i B(x_n^{-1} \pi_i(bnd(\mathbf{x})), e^{-n(\lambda_{d-i} - \lambda_{d-i+1} - 2\epsilon)}) \leq h + \eta \right\} .$$

Comme  $A \subset A_\eta$ , on a  $\mathbb{P}(A_\eta) = 1$  et on peut écrire

$$A_\eta = \bigcup_N \bigcap_{n \geq N} \left\{ \mathbf{x} : -\frac{1}{n} \log \check{\nu}^i B(x_n^{-1} \pi_i(bnd(\mathbf{x})), e^{-n(\lambda_{d-i} - \lambda_{d-i+1} - 2\epsilon)}) \leq h + \eta \right\} ;$$

donc quels que soit  $\eta > 0$  et  $\chi > 0$ , il existe  $N_{\eta, \chi}$  tel que pour tout  $n \geq N_{\eta, \chi}$  on ait

$$\mathbb{P} \left\{ \mathbf{x} : -\frac{1}{n} \log \check{\nu}^i B(x_n^{-1} \pi_i(bnd(\mathbf{x})), e^{-n(\lambda_{d-i} - \lambda_{d-i+1} - 2\epsilon)}) \leq h + \eta \right\} \geq 1 - \chi ;$$

c'est à dire, en se servant du lemme précédent

$$\nu^i \left\{ t : -\frac{1}{n} \log \check{\nu}^i B(t, e^{-n(\lambda_{d-i} - \lambda_{d-i+1} - 2\epsilon)}) \leq h + \eta \right\} \geq 1 - \chi .$$

Et on obtient ainsi le résultat. □

### 4.2.2 Traduction en terme de dimension

On suppose dans cette partie que  $\mu = \check{\mu}$  ; et donc  $\nu = \check{\nu}$ . Le lemme suivant est une conséquence du lemme de Bésicovich (voir la définition 6.3.1) :

**Lemme 4.2.3.** *Il existe une constante  $D$  et un  $\delta_0 > 0$  tels que pour  $\delta \in ]0, \delta_0]$  et pour tout sous-ensemble  $Z$  de  $\mathcal{B}_i$ , il existe un recouvrement de  $Z$  de multiplicité  $D$  par des boules de rayon  $\delta$  centrées dans  $Z$ .*

**Théorème 4.1.** *Sous les hypothèses précédentes, on a*

$$\overline{\dim}_B(\nu^i) \leq \frac{h}{\lambda_{d-i} - \lambda_{d-i+1}} .$$

*Démonstration.* Notons  $E_\eta = \{t : \nu^i B(t, \delta) \geq \delta^{h/(\lambda_{d-i} - \lambda_{d-i+1}) + \eta}\}$ . Rappelons que l'on note  $N(E_\eta, \delta)$  le nombre minimal de boules avec lequel on peut recouvrir  $E_\eta$ . D'après le lemme précédent, il existe un recouvrement de  $E_\eta$  de multiplicité  $D$  par des boules centrées dans  $E_\eta$ . La somme des mesures des boules de ce recouvrement est plus petite que  $D$ . Et comme le cardinal du recouvrement est plus grand que  $N(E_\eta, \delta)$ , cette somme est plus grande que  $N(E_\eta, \delta) \delta^{h/(\lambda_{d-i} - \lambda_{d-i+1}) + \eta}$ . On a donc

$$D \geq N(E_\eta, \delta) \delta^{h/(\lambda_{d-i} - \lambda_{d-i+1}) + \eta} ;$$

ce qui entraîne

$$\frac{\log N(E_\eta, \delta)}{\log 1/\delta} \leq \frac{h}{\lambda_{d-i} - \lambda_{d-i+1}} + \eta + \frac{D}{\log 1/\delta} ;$$

et donc

$$\overline{\dim}_B(E_\eta) \leq \frac{h}{\lambda_{d-i} - \lambda_{d-i+1}} + \eta .$$

Ainsi en se servant du Corollaire 4.2.1 on obtient que quel que soit  $\eta$ ,

$$\overline{\dim}_B(\nu^i) \leq \frac{h}{\lambda_{d-i} - \lambda_{d-i+1}} + \eta .$$

□

**Remarque 4.2.1.** *Pour l'extension au cas général, il est important de remarquer qu'en notant  $\rho_\mu = (\lambda_1, \dots, \lambda_d)$  et  $\alpha_i$  la racine simple  $\epsilon_i - \epsilon_{i+1}$ , on a  $\lambda_i - \lambda_{i+1} = \alpha_i(\rho_\mu)$ .*

### 4.2.3 Remarque sur l'inégalité inverse

**Définition de l'entropie de la marche aléatoire sur la grasmanienne de rang  $i$**

Pour espérer obtenir l'inégalité inverse, il faut affiner un peu l'inégalité (4.5). On définit l'entropie associée à la grasmanienne de rang  $i$  (voir la dernière partie du Chapitre 1) :

$$h_i = - \sum_{g \in G} \mu(g) \int_{\mathcal{B}_i} \log \frac{dg^{-1} \nu^i}{d\nu^i}(b) d\nu^i(b) . \quad (4.7)$$

La propriété suivante est un fait général ; on la démontre dans ce cas particulier.

**Proposition 4.2.2.** *Quel que soit  $i$  compris entre 1 et  $d$ , on a  $h_i \leq h$ .*

*Démonstration.* On a pour chaque  $g$

$$\int_{B_i} \log \frac{dg^{-1}\nu^i}{d\nu^i}(b) d\nu^i(b) = \int_B \log \frac{dg^{-1}\nu^i}{d\nu^i}(\pi_i(\xi)) d\nu(\xi) .$$

Or pour  $\nu$ -presque tout  $\xi$  on a

$$\frac{dg^{-1}\nu^i}{d\nu^i}(\pi_i(\xi)) \geq \frac{dg^{-1}\nu}{d\nu}(\xi) ;$$

ce qui donne le résultat. Montrons cette dernière inégalité. Pour tout ensemble mesurable  $C$  on a

$$\int_C \frac{dg^{-1}\nu^i}{d\nu^i}(\pi_i(\xi)) d\nu(\xi) = \int_{\pi_i(C)} \frac{dg^{-1}\nu^i}{d\nu^i}(b) d\nu^i(b) = \nu^i(g\pi_i(C)) .$$

Et comme  $\pi_i$  est  $G$  équivariante,

$$\int_C \frac{dg^{-1}\nu^i}{d\nu^i}(\pi_i(\xi)) d\nu(\xi) = \nu^i(\pi_i(gC)) .$$

Il reste à remarquer que

$$\nu^i(\pi_i(gC)) = \nu(\pi_i^{-1} \circ \pi_i(gC)) \geq \nu(gC) = g^{-1}\nu(C)$$

pour conclure que

$$\int_C \frac{dg^{-1}\nu^i}{d\nu^i}(\pi_i(\xi)) d\nu(\xi) \geq \int_C \frac{dg^{-1}\nu}{d\nu}(\xi) d\nu(\xi) .$$

□

## Cocycles

Dans cette partie  $Y$  désigne un espace sur lequel  $G$  agit,  $\mu$  une mesure de probabilité sur  $G$  et  $\nu$  une mesure de probabilité sur  $Y$ .

**Définition 4.2.1.** *Une application  $\sigma$  de  $(G, Y)$  dans  $\mathbb{R}$  est appelée cocycle si elle vérifie :*

$$\forall g_1, g_2 \in G, y \in Y, \quad \sigma(g_1 g_2, y) = \sigma(g_1, g_2 y) + \sigma(g_2, y) .$$

Définissons alors une application  $\tilde{T}$  de  $(G^{\mathbb{N}}, Y)$  dans lui-même par :

$$\tilde{T}((g_n)_{n \geq 1}, y) = (T((g_n)_{n \geq 1}), g_1 y) ;$$

$T$  désignant le décalage dans  $G^{\mathbb{N}}$ . Un calcul montre alors que la mesure de probabilité  $\mu^{\otimes \mathbb{N}} \otimes \nu$  est  $\tilde{T}$ -invariante si et seulement si  $\nu$  est  $\mu$ -stationnaire. De plus, s'il existe une unique mesure  $\mu$ -stationnaire  $\nu$  sur  $Y$  alors  $\mu^{\otimes \mathbb{N}} \otimes \nu$  est ergodique. On suppose maintenant que l'on se trouve dans ce cas.

Soit  $\sigma$  un cocycle sur  $(G, Y)$  ; on note

$$\tilde{\sigma}((g_n)_{n \geq 1}, y) = \sigma(g_1, y) .$$

L'intérêt de cette notion de cocycle vient ici de l'égalité :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \tilde{\sigma}(\tilde{T}^k((g_n)_{n \geq 1}, y)) = \sigma(g_n \cdots g_1, y) .$$

Ainsi, lorsque  $(h_n)$  est une suite de v.a.i.i.d. de loi  $\mu$ , d'après le théorème de Birkhoff on a presque sûrement et dans  $L^1$  :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sigma(h_n \cdots h_1, y) = \int_{G^{\mathbb{N}} \times Y} \tilde{\sigma}((g_n), y) d(\mu^{\otimes \mathbb{N}} \otimes \nu)((g_n), y) ;$$

c'est à dire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sigma(h_n \cdots h_1, y) = \int_G \int_Y \sigma(g, y) d\mu(g) d\nu(y) . \quad (4.8)$$

### Minoration de $h_i$

On a un analogue de l'inégalité (4.5) :

**Proposition 4.2.3.** *Soit  $C \subset \mathcal{B}_i$  tel que  $\check{\nu}^i(C) > 0$ . On note  $\check{h}_i$  l'entropie associée comme précédemment (formule (4.7)) à  $\check{\mu}$ . Alors on a*

$$\check{h}_i \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \check{\nu}^i(x_n^{-1}C) .$$

*Démonstration.* L'application qui à  $(g, b)$  dans  $(G, \mathcal{B}_i)$  associe  $-\log \frac{dg^{-1}\check{\nu}^i}{d\check{\nu}^i}(b)$  est un cocycle. Rappelons que  $x_n = h_1 \cdots h_n$ , chaque  $h_i$  étant de loi  $\mu$ . Ainsi chaque  $h_i^{-1}$  est de loi  $\check{\mu}$  ; donc, d'après ce qui précède (formule 4.8) et la définition de  $\check{h}_i$ , la suite

$$-\frac{1}{n} \log \frac{d(h_n^{-1} \cdots h_1^{-1})^{-1}\check{\nu}^i}{d\check{\nu}^i}(b) = -\frac{1}{n} \log \frac{dx_n\check{\nu}^i}{d\check{\nu}^i}(b)$$

converge vers  $\check{h}_i$  presque sûrement et dans  $L^1$ .

Si  $C$  est de mesure non nulle, on obtient alors

$$\check{h}_i = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\check{\nu}^i(C)} \int_C \log \frac{dx_n\check{\nu}^i}{d\check{\nu}^i}(b) d\check{\nu}^i(b) ;$$

et en utilisant l'inégalité de Jensen,

$$\check{h}_i \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \check{\nu}^i(x_n^{-1}C) .$$

□

Supposons maintenant que  $\mu$  est symétrique. En se servant de la Proposition 4.2.1, on aboutit à la même conclusion que celle du Théorème 4.1, en remplaçant  $h$  par  $h_i$  :

$$\overline{\dim}_B(\nu^i) \leq \frac{h_i}{\lambda_{d-i} - \lambda_{d-i+1}} .$$

**Question** : Peut-on obtenir une égalité dans l'inégalité ci-dessus ?

### 4.3 Extension de la majoration de la dimension à un cadre plus général

Dans cette partie  $G$  est un groupe linéaire algébrique réel semi-simple connexe à centre fini, sans facteur compact. On se donne un sous-groupe Zarisky-dense discret  $\Gamma$  de  $G$ , ainsi qu'une mesure de probabilité  $\mu$  sur  $\Gamma$  dont le support engendre  $\Gamma$  et qui admet un moment d'ordre 1.

Rappelons tout d'abord le principe de la démonstration dans le cas de  $SL(d, \mathbb{R})$ . On a utilisé la projection de  $G/P$  sur une grassmannienne  $\mathcal{B}_i$ ; et on a remarqué que  $\mathcal{B}_i$  était une partie de l'espace projectif  $\mathcal{P}(\bigwedge_i \mathbb{R}^d)$ . On a ensuite utilisé les propriétés de la représentation de  $SL(d, \mathbb{R})$  dans  $\bigwedge_i \mathbb{R}^d$  pour démontrer la Proposition 4.2.1. Pour étendre cela à  $G$ , on a besoin de quelques compléments.

#### 4.3.1 Représentations et sous-groupes paraboliques

**Définition 4.3.1.** *Une représentation de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  est un morphisme d'algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$  dans  $\mathfrak{sl}(V)$ ,  $V$  étant un espace vectoriel de dimension finie, réel ou complexe.*

**Définition 4.3.2.** *Une représentation (resp : représentation projective) du groupe semi-simple  $G$  est un morphisme différentiable de  $G$  dans  $SL(V)$  (resp :  $PSL(V)$ ),  $V$  étant un espace vectoriel de dimension finie (réel ou complexe).*

Une représentation est dite irréductible si  $V$  n'admet pas de sous-espace strict  $G$ (ou  $\mathfrak{g}$ )-invariant. A toute représentation de  $G$  correspond la représentation tangente de  $\mathfrak{g}$ . Les représentations projectives irréductibles de  $G$  sont ainsi en bijection avec les représentations irréductibles de  $\mathfrak{g}$  ([GJT98], Prop. 4.6). On notera de la même manière une représentation projective et sa représentation tangente.

Soit  $\tau$  une représentation irréductible de  $\mathfrak{g}$  sur un espace vectoriel  $V$ . Pour  $\lambda$  dans  $\mathfrak{a}^*$ , on note

$$V_\lambda = \{v \in V : \forall X \in \mathfrak{a}, \tau(X)(v) = \lambda(X)v\} .$$

Si  $V_\lambda \neq \emptyset$ ,  $\lambda$  est appelé poids de la représentation  $\tau$ ; on note  $\Lambda$  l'ensemble de ces poids. Parmi ceux-ci, il y en a un (dit plus haut poids), noté  $\lambda_\tau$ , qui est caractérisé par la propriété suivante : tous les autres poids  $\lambda$  s'écrivent

$$\lambda = \lambda_\tau - \sum_{\alpha \in \Delta} c_\alpha \alpha ;$$

$\Delta$  désignant l'ensemble des racines simples défini dans la Section 4.1 et les  $c_\alpha$  étant des entiers positifs ou nuls. Remarquons que l'on a alors également

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda .$$

**Exemple :** le plus haut poids de la représentation de  $SL(d, \mathbb{R})$  dans  $\bigwedge_i \mathbb{R}^d$  est  $\lambda_\tau = \epsilon_1 + \dots + \epsilon_i$ ; et les autres poids  $\lambda$  s'écrivent

$$\lambda = \lambda_\tau - \alpha_i - \dots .$$

Le fait que  $-\alpha_i = -(\epsilon_i - \epsilon_{i+1})$  apparaisse dans chaque poids autre que le plus haut poids va être important pour la suite.

**Définition 4.3.3.** *Un sous-groupe fermé de  $G$  est dit parabolique standard s'il contient  $P$ .*

Il y a une correspondance bijective entre les sous-ensemble  $I$  de  $\Delta$  et les sous-groupes paraboliques standards (voir [GJT98], 2.7).

Le lien entre représentations et sous-groupes paraboliques standards est le suivant ([GJT98], Prop. 4.18 et 4.24). Soit  $\tau$  une représentation irréductible de  $G$  dans un espace vectoriel  $V$ . Soit  $\lambda_\tau$  son plus haut poids et  $V_\tau := V_{\lambda_\tau}$ . Alors le stabilisateur de  $V_\tau$  est un sous-groupe parabolique standard, noté  $P_\tau$ . De plus, on peut supposer  $V_\tau = \text{vect}(v_\tau)$  de dimension 1 (sans changer  $P_\tau$ ). Alors  $\tau(G)v_\tau$  est une sous-variété compacte de  $\mathcal{P}(V)$  isomorphe à  $G/P_\tau$ . Tous les sous-groupes paraboliques standards peuvent être obtenus ainsi ([GJT98], Prop. 4.27) ; la représentation obtenue n'est pas toujours fidèle.

### 4.3.2 Application

Appliquons maintenant les propriétés rappelées dans la partie précédente. Etant donnée une représentation irréductible  $\tau$  sur un espace vectoriel  $V$ , on peut effectuer la même construction que dans la Section 4.2.1 : on a une projection  $\pi_\tau$  de  $G/P$  sur  $G/P_\tau$  ; et la mesure  $\nu^\tau := \pi_\tau(\nu)$  est  $\mu$ -stationnaire. On a donc toujours l'inégalité du Lemme 4.2.1 :

$$h \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \check{\nu}^\tau(\tau(x_n)^{-1}C) ; \quad (4.9)$$

pour  $\mathbb{P}$ -presque tout  $(x_n)$ , lorsque  $\check{\nu}^\tau(C) > 0$ . De même on peut définir une distance  $\delta$  sur  $G/P_\tau$  en utilisant le fait qu'il est contenu dans  $\mathcal{P}(V)$  (voir Appendice), le produit hermitien qui définit cette distance restant à choisir.

Il reste à choisir correctement la représentation  $\tau$  afin d'obtenir un analogue de la Proposition 4.2.1.

On se sert tout d'abord de la correspondance entre les sous-groupes paraboliques standards et les  $I \subset \Delta$  : on fixe une racine  $\alpha \in \Delta$  et on choisit  $I = \Delta \setminus \{\alpha\}$  ; on note  $P_\alpha$  le sous-groupe parabolique correspondant. Puis on choisit la représentation irréductible  $\tau_\alpha$  telle que  $P_\alpha = P_{\tau_\alpha}$  soit le stabilisateur de  $V_{\tau_\alpha}$ . On adopte alors les notations  $\lambda_{\tau_\alpha}, \dots$  comme précédemment.

La Proposition 4.19 et le Lemme B.8 de [GJT98] nous permettent alors de déterminer plus précisément les poids de  $\tau_\alpha$ .

**Lemme 4.3.1.** *Les poids  $\lambda$  de  $\tau_\alpha$  distincts du plus haut poids  $\lambda_{\tau_\alpha}$  sont de la forme*

$$\lambda = \lambda_{\tau_\alpha} - \alpha - \sum_{\beta \in \Delta} c_\beta \beta ;$$

*les  $c_\beta$  étant des entiers positifs ou nuls ; de plus  $\lambda_{\tau_\alpha} - \alpha$  est bien un poids.*

Il nous reste à préciser le produit Hermitien sur l'espace vectoriel  $V$  portant cette représentation servant à définir la distance  $\delta$  sur  $\mathcal{P}(V)$ . On choisit celui dont l'existence est assurée par la proposition suivante (voir [GJT98], Prop. 4.32) :

**Proposition 4.3.1.** *Etant donnée une représentation irréductible  $\tau : \mathfrak{g} \rightarrow PSL(V)$ , il existe sur  $V$  un produit hermitien, noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , tel que, si  $u^*$  désigne l'adjoint de  $u$  par rapport à ce produit hermitien, pour tout  $X$  dans  $\mathfrak{g}$ ,*

$$\tau(\theta(X)) = -\tau(X)^* .$$

Rappelons que  $\theta$  désigne l'involution de Cartan sur  $\mathfrak{g}$ .

En particulier, les éléments de  $K$  seront envoyés par  $\tau$  sur des éléments orthonormaux vis à vis de  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

Pour des raisons techniques, on ne travaille pas avec  $\tau_\alpha$  mais avec la représentation  $\tau'_\alpha$ ; où l'on a noté, pour tout  $g$  dans  $G$ ,  $\tau'(g) = (\tau(g)^{-1})^*$ . Pour alléger les notations, on note provisoirement  $\tau = \tau'_\alpha$ . On adopte les mêmes notations  $P_\tau, \dots$  que précédemment. On est maintenant en mesure de montrer la proposition suivante :

**Proposition 4.3.2.** *Quel que soit  $\epsilon > 0$ , pour  $\mathbb{P}$ -presque toute trajectoire  $(x_n)$ , il existe  $N$  et  $C \subset G/P_\tau$  ( $\tilde{\nu}_\tau(C) > 0$ ), tels que quel que soit  $n \geq N$ ,*

$$\tau(x_n^{-1})C \subset B\left(\tau(x_n^{-1})\pi_\tau(bnd(\mathbf{x})), e^{-n(\alpha(\rho_\mu) - \epsilon)}\right) .$$

*Démonstration.* On fixe une trajectoire  $\mathbf{x}$  telle que

$$d(x_n o, (ke^{\rho_\mu} k^{-1})^n o) = o(n) .$$

On a alors  $\tau(x_n^{-1}(ke^{\rho_\mu} k^{-1})^n o) = d_n$ , avec  $\log \|d_n\| = o(n)$  (c'est une conséquence de l'équation (5.1)). On pose  $v = \tau(k)v_\tau$ ; remarquons que  $\bar{v} = \pi_\tau(bnd(\mathbf{x}))$ . On a alors  $\tau(x_n^{-1})v = d_n \tau(ke^{-n\rho_\mu})v_\tau$ ; ce qui donne

$$\begin{aligned} \tau(x_n^{-1})v &= d_n \tau(k) \left( (\tau_\alpha(e^{-n\rho_\mu}))^{-1} \right)^* v_\tau \\ &= d_n \tau(k) (\tau_\alpha(e^{n\rho_\mu}))^* v_\tau \\ &= d_n \tau(k) \exp(n\lambda_{\tau_\alpha}(\rho_\mu)) v_\tau . \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\|d_n^{-1}\|^{-1} \exp(n\lambda_{\tau_\alpha}(\rho_\mu)) \leq \|\tau(x_n^{-1})v\| \leq \|d_n\| \exp(n\lambda_{\tau_\alpha}(\rho_\mu)) ;$$

et donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|\tau(x_n^{-1})v\| = \lambda_{\tau_\alpha}(\rho_\mu) . \quad (4.10)$$

Par ailleurs si  $u \in \oplus_{\Lambda \setminus \{\lambda_\tau\}} V_\lambda$ , vu le Lemme 4.3.1,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|\tau(x_n^{-1})u\| \leq \lambda_{\tau_\alpha}(\rho_\mu) - \alpha(\rho_\mu) . \quad (4.11)$$

On reprend maintenant l'estimation faite dans la preuve de la Proposition 4.2.1 de manière plus formelle. Si  $w = \beta v + u$ ,  $u \in \oplus_{\Lambda \setminus \{\lambda_\tau\}} V_\lambda$ , est un vecteur de norme 1 dans  $V$ , on a

$$\sin^2 \delta(\overline{\tau(x_n)^{-1}v}, \overline{\tau(x_n)^{-1}w}) = 1 - \frac{|\langle \tau(x_n)^{-1}v, \beta \tau(x_n)^{-1}v + \tau(x_n)^{-1}u \rangle|^2}{\|\tau(x_n)^{-1}v\|^2 \|\beta \tau(x_n)^{-1}v + \tau(x_n)^{-1}u\|^2} .$$

Or

$$|\langle \tau(x_n)^{-1}v, \beta\tau(x_n)^{-1}v + \tau(x_n)^{-1}u \rangle| \geq \beta \|\tau(x_n)^{-1}v\|^2 - \|\tau(x_n)^{-1}v\| \|\tau(x_n)^{-1}u\| ,$$

de même

$$\begin{aligned} \|\beta\tau(x_n)^{-1}v + \tau(x_n)^{-1}u\|^2 &\leq \beta^2 \|\tau(x_n)^{-1}v\|^2 \\ &\quad + \|\tau(x_n)^{-1}u\|^2 + 2\beta \|\tau(x_n)^{-1}v\| \|\tau(x_n)^{-1}u\| ; \end{aligned}$$

ce qui entraîne, après simplification,

$$\begin{aligned} \sin^2 \delta(\overline{\tau(x_n)^{-1}v}, \overline{\tau(x_n)^{-1}u}) &\leq 1 - \frac{4\beta \|\tau(x_n)^{-1}v\| \|\tau(x_n)^{-1}u\|}{\|\beta\tau(x_n)^{-1}v + \tau(x_n)^{-1}u\|^2} \\ &\leq \frac{4\beta \|\tau(x_n)^{-1}v\|^2}{\|\beta\tau(x_n)^{-1}v + \tau(x_n)^{-1}u\|^2} \times \frac{\|\tau(x_n)^{-1}u\|}{\|\tau(x_n)^{-1}v\|} \end{aligned}$$

Vues les équations (4.10) et (4.11), le premier terme de ce produit est borné et, pour tout  $\epsilon > 0$ , si  $n$  est assez grand, le second est plus petit que  $e^{-n(\alpha(\rho_\mu) - \epsilon)}$  ; d'où le résultat.  $\square$

On abandonne maintenant la simplification de notation  $\tau = \tau'_\alpha$ . La suite de ce que l'on avait fait dans le cas de  $SL(d, \mathbb{R})$  s'applique sans modification,  $\alpha(\rho_\mu)$  jouant le rôle de  $\lambda_{d-i} - \lambda_{d-i+1}$  ; et on obtient ainsi :

**Théorème 4.2.** *Pour toute racine simple  $\alpha$  on a, sous les hypothèses précédentes, et en supposant de plus que  $\mu$  est symétrique,*

$$\overline{\dim}_B(\nu^{\tau'_\alpha}) \leq \frac{h}{\alpha(\rho_\mu)} .$$





# Chapitre 5

## Marche aléatoire sur un groupe semi-simple : construction d'une mesure harmonique singulière

Dans ce chapitre,  $G$  est un groupe linéaire algébrique semi-simple connexe, sans facteur compact, et à centre fini. On considère des marches aléatoires sur un sous-groupe discret Zariski-dense  $\Gamma$  de  $G$ . On a vu au chapitre précédent qu'étant donnée une mesure  $\mu$ , sous certaines hypothèses sur  $\Gamma$  et sur  $\mu$ , la mesure harmonique associée  $\nu$  est portée par  $G/P$ ,  $P$  étant un sous-groupe parabolique minimal. Notre but est de construire une mesure  $\mu$  telle que la mesure harmonique associée  $\nu$  soit singulière par rapport au type de mesure lisse, c'est à dire par rapport à la mesure de Haar.

Pour caractériser le fait que la mesure harmonique est singulière, on va utiliser sa dimension de Hausdorff. Notre démarche va être la suivante : on a montré dans le Chapitre 4 que la dimension de certaines projections de  $\nu$  est majorée par le quotient de  $h$  par la différence de deux exposants ; on construit ici une suite de mesures  $(\mu_k)$  pour lesquelles lorsque  $k$  devient grand, la différence entre deux exposants est aussi grande que l'on veut tandis que l'entropie asymptotique reste bornée ; et ainsi on obtient un exemple de marche aléatoire dont la mesure harmonique n'est pas de dimension maximale. On remarque ensuite que si une mesure est absolument continue, sa dimension est la dimension de la variété qui la porte ce qui permet de conclure.

On se restreint tout d'abord au cas de  $SL(d, \mathbb{R})$ . La section 5.3 est consacrée à un point de vue plus géométrique sur cette construction ; ce qui nous permettra d'étendre la conclusion à certains groupes semi-simples.

### 5.1 Construction : cas de $SL(d, \mathbb{R})$

On se donne un sous-groupe Zariski-dense discret  $\Gamma$  de  $G = SL(d, \mathbb{R})$ .

### 5.1.1 Introduction de la suite $(\mu_k)$

**Définition 5.1.1.** *Un élément de  $SL(d, \mathbb{R})$  est dit  $\mathbb{R}$ -régulier s'il est semi-simple (ie : diagonalisable sur  $\mathbb{C}$ ) à valeurs propres réelles simples.*

**Définition 5.1.2.** *Un élément de  $SL(d, \mathbb{R})$  est dit hyperbolique (resp : elliptique) s'il est semi-simple à valeurs propres réelles strictement positives (resp : semi-simple à valeurs propres de module 1).*

**Lemme 5.1.1.** *([BL93]) Tout sous-groupe Zariski-dense de  $SL(d, \mathbb{R})$  contient des éléments  $\mathbb{R}$ -réguliers.*

En fait on peut même montrer qu'un tel groupe contient un élément dont les modules des valeurs propres sont distincts. Quitte à prendre le carré d'un tel élément, on peut le supposer hyperbolique. On fixe pour la suite un élément  $\gamma$   $\mathbb{R}$ -régulier hyperbolique dans  $\Gamma$ .

**Remarque 5.1.1.** *En prenant le carré, on a escamoté une matrice diagonale avec des 1 et des  $-1$ , c'est à dire l'élément elliptique qui apparaît dans la décomposition d'un élément semi-simple en le produit d'un élément hyperbolique et d'un élément elliptique qui commutent (voir partie 5.3.4).*

On se donne pour la suite de cette section une mesure  $\mu$  symétrique admettant un moment d'ordre 1 et dont le support engendre  $\Gamma$ . On définit, pour tout  $k$  dans  $\mathbb{N}$ , la mesure suivante :

$$\mu_k = \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{4}(\delta_{\gamma^k} + \delta_{\gamma^{-k}}) .$$

Remarquons tout d'abord que chaque  $\mu_k$  vérifie les hypothèses de l'introduction et de la section 4.2. On notera  $\nu_k$  la mesure harmonique associée à  $\mu_k$  ; et  $\nu_k^i$  les projections.

On cherche à montrer que la dimension d'une de ces projections devient petite lorsque  $k$  tend vers l'infini. Rappelons la formule du Théorème 4.1 :

$$\dim \nu^i \leq \frac{h}{\lambda_{d-i} - \lambda_{d-i+1}} .$$

Comme dans le cas des espaces hyperboliques on a la propriété suivante :

**Proposition 5.1.1.** *La quantité  $h(G, \mu_k)$  est bornée par une constante qui ne dépend pas de  $k$ .*

Il va donc nous suffir de montrer qu'il existe un  $i$  tel que  $(\lambda_{i+1} - \lambda_i)(G, \mu_k)$  tend vers l'infini lorsque  $k$  tend vers l'infini. Pour cela, on va utiliser la formule de Furstenberg et estimer le premier exposant de Liapounov.

### 5.1.2 Une remarque sur la formule de Furstenberg

On se place momentanément dans le cadre général de ce chapitre.

On se donne une représentation irréductible  $\tau$  du groupe  $G$  sur un espace vectoriel  $V$ , dont on note  $\lambda_\tau$  le plus haut poids,  $V_\tau$ . Le groupe  $G$  agit alors sur  $\mathcal{P}(V)$ . On suppose qu'il n'existe sur  $\mathcal{P}(V)$  qu'une seule mesure  $\mu$ -stationnaire  $\nu^\tau$ .

On peut alors appliquer le résultat sur les cocycles rappelé dans la section 4.2.3, qui nous donne :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \frac{\|\tau(x_n^{-1})v\|}{\|v\|} = \sum_g \check{\mu}(g) \int_{\mathcal{P}(V)} \log \frac{\|\tau(g)x\|}{\|x\|} d\check{\nu}^\tau(\bar{x}) ;$$

pour  $\mathbb{P}$ -presque toute trajectoire et  $\check{\nu}^\tau$ -presque tout  $\bar{v}$ . On a fixé une norme  $\|\cdot\|$  sur  $V$ ; on peut la choisir de telle sorte que si  $k \in K$ , alors  $\tau(k)$  soit unitaire.

On peut également donner une autre expression pour cette limite. Rappelons que la formule (4.3) régissant le comportement des trajectoires de la marche aléatoire se traduit par : pour presque toute trajectoire  $(x_n)$ ,

$$x_n^{-1}(ke^{\rho_\mu}k^{-1})^n = d_n ,$$

avec  $d(o, d_n o) = o(n)$ . Remarquons qu'alors on a aussi  $d(o, d_n^{-1}o) = o(n)$ . On se sert alors du fait suivant : comme  $\tau$  est une représentation irréductible, il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$|\log \|\tau(g)\| - \lambda_\tau(r(g))| \leq C ; \quad (5.1)$$

où  $r(g) \in \overline{\mathfrak{a}^+}$  est la partie "polaire" de  $g$ . Cette inégalité entraîne d'une part que

$$\log \|\tau(d_n)\| = o(n) .$$

D'autre part, on a

$$\tau(x_n^{-1})v = \tau\left(d_n(ke^{-n\rho_\mu}k^{-1})\right)v = \tau(d_n)\tau(k)\tau(e^{-n\rho_\mu})\tau(k)^{-1}v ;$$

et donc, d'après ce qui précède,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|\tau(x_n^{-1})v\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|\tau(e^{-n\rho_\mu})\tau(k)^{-1}v\| .$$

Rappelons que si  $u \in V_\tau$ ,  $\tau(e^{-n\rho_\mu})u = \lambda_\tau(-\rho_\mu)^n u$ ; que les sous-espaces associés aux différents poids sont en somme directe; et que si  $u$  est dans un autre de ces sous-espaces associé au poids  $\lambda$ ,  $\tau(e^{-n\rho_\mu})u = \lambda(-\rho_\mu)^n u$  ( $u$  est alors moins dilaté que les éléments de  $V_\tau$ ). Or, comme  $\nu^\tau$  ne charge aucun sous-ensemble algébrique strict, la composante  $u_v$  selon  $V_\tau$  de  $\tau(k)^{-1}v$  est pour presque tout  $v$  non nulle et on a donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|\tau(x_n^{-1})v\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|\tau(e^{-n\rho_\mu})\| ;$$

l'inégalité (5.1) a alors pour conséquence

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \frac{\|\tau(x_n^{-1})v\|}{\|v\|} = \lambda_\tau(r(e^{-\rho_\mu})) .$$

On en déduit la formule suivante :

$$\sum_g \check{\mu}(g) \int_{\mathcal{P}(V)} \log \frac{\|\tau(g)x\|}{\|x\|} d\check{\nu}^\tau(\bar{x}) = \lambda_\tau(r(e^{-\rho_\mu})) . \quad (5.2)$$

**Remarque 5.1.2.** La formule de Furstenberg "fonctionne" avec une marche aléatoire "à gauche"; c'est pour cela qu'ayant défini le vecteur des exposants de Liapunov à partir de la marche "à droite" on se retrouve avec des " $\sim$ " dans la formule. On peut cependant remarquer que  $r(e^{-\rho_\mu})$  est juste le vecteur  $-\rho_\mu$  "réordonné" (le premier exposant devient le dernier  $\dots$ ); et qu'il correspond au vecteur des exposants "classique" de la marche aléatoire (à gauche) définie par  $\check{\mu}$ .

### 5.1.3 Estimation des exposants

On note toujours  $\rho_\mu = (\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ . En considérant la représentation de  $G$  dans lui-même, la formule (5.2) nous permet d'exprimer le "premier" (voir Remarque 5.1.2) exposant de Liapunov :

$$-\lambda_d = \sum_g \check{\mu}(g) \int_{\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)} \log \frac{\|gx\|}{\|x\|} d\check{\nu}^1(\bar{x}) ;$$

$\bar{x}$  désignant la classe de  $x$  dans  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$  et  $\check{\nu}^1$ , comme dans la section précédente, la mesure de probabilité  $\check{\mu}$ -stationnaire sur  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ .

Pour ne pas alourdir ce qui suit, on suppose ici que  $\mu$  est symétrique. On a alors  $-\lambda_d = \lambda_1$ . Notons  $\lambda_1(k)$  l'exposant associé à  $\mu_k$ . On a

$$\lambda_1(k) = \frac{1}{2} \sum_g \mu(g) \int_{\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)} \log \frac{\|gx\|}{\|x\|} d\nu_k^1(\bar{x}) + \frac{1}{4} \int_{\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)} \left( \log \frac{\|\gamma^k x\|}{\|x\|} + \log \frac{\|\gamma^{-k} x\|}{\|x\|} \right) d\nu_k^1(\bar{x}) . \quad (5.3)$$

La valeur absolue du premier terme de cette somme est bornée par

$$M_1 = \frac{1}{2} \sum_g \mu(g) \max\{\log \|g\|, \log \|g^{-1}\|\} ;$$

quantité qui est finie car  $\mu$  admet un moment d'ordre 1.

On diagonalise  $\gamma : \gamma = hch^{-1}$ ,  $c = \text{diag}(c_1, \dots, c_d) \in A^+$ .

**Lemme 5.1.2.** La quantité  $\left( \log \frac{\|\gamma^k x\|}{\|x\|} + \log \frac{\|\gamma^{-k} x\|}{\|x\|} \right)$  est bornée inférieurement par  $\log \|h^{-1}\|^{-2} \|h\|^{-2}$ .

*Démonstration.* On a

$$\begin{aligned} \|\gamma^k x\|^2 \|\gamma^{-k} x\|^2 &= \|hc^k h^{-1} x\|^2 \|hc^{-k} h^{-1} x\|^2 \\ &\geq \|h^{-1}\|^{-2} \|c^k h^{-1} x\|^2 \|h^{-1}\|^{-2} \|c^{-k} h^{-1} x\|^2 . \end{aligned}$$

Or

$$\|c^k y\|^2 \|c^{-k} y\|^2 \geq \langle c^k y, c^{-k} y \rangle^2 = \left( \sum_i c_i^k y_i c_i^{-k} y_i \right)^2 = \|y\|^4 ;$$

donc

$$||\gamma^k x||^2 ||\gamma^{-k} x||^2 \geq ||h^{-1}||^{-4} ||h^{-1} x||^4 \geq ||h^{-1}||^{-4} ||h||^{-4} ||x||^4 .$$

□

Fixons  $\beta > 0$  et posons

$$U_\beta = \left\{ \bar{x} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) : \frac{\langle h^{-1}x, e_1 \rangle}{||h^{-1}x||} > \beta \text{ et } \frac{\langle h^{-1}x, e_d \rangle}{||h^{-1}x||} > \beta \right\} .$$

L'ouvert  $U_\beta$  est non vide si  $\beta$  est suffisamment petit. On va voir que cela entraîne qu'il est chargé uniformément par les  $\nu_k^1$ .

**Lemme 5.1.3.** *Il existe une constante  $C_\beta > 0$  telle que pour tout  $k$ ,*

$$\nu_k^1(U_\beta) \geq C_\beta .$$

*Démonstration.* Notons  $\Lambda_\Gamma^1$  l'ensemble limite associé à la compactification de Furstenberg dans  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ . D'après le Corollaire 4.1.1, il existe des éléments  $\gamma_1, \dots, \gamma_r$  de  $\Gamma$  tels que

$$\Lambda_\Gamma^1 \subset \bigcup_i \gamma_i U_\beta .$$

Soit alors  $s$  tel que ces  $\gamma_i$  soient dans le support de  $\mu^s$ . En utilisant la  $\mu_k$ -stationnarité de  $\nu_k^1$ , on obtient que

$$\nu_k^1 \geq \frac{1}{2^s} \mu^s * \nu_k^1 ;$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \nu_k^1(U_\beta) &\geq \frac{1}{2^s} \sum_{i=1}^r \mu^s(\gamma_i) \nu_k^1(\gamma_i U_\beta) \\ \nu_k^1(U_\beta) &\geq \frac{1}{2^s} \min\{\mu^s(\gamma_i)\} \nu_k^1\left(\bigcup_i \gamma_i U_\beta\right) = \frac{1}{2^s} \min\{\mu^s(\gamma_i)\} > 0 \end{aligned}$$

□

**Proposition 5.1.2.** *La suite  $(\lambda_1(k))$  vérifie*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_1(k) = +\infty .$$

*Démonstration.* Si  $\bar{x} \in U_\beta$ , on a

$$||\gamma^k x|| = ||hc^k h^{-1} x|| \geq ||h^{-1}||^{-1} c_1^k \langle h^{-1} x, e_1 \rangle \geq ||h^{-1}||^{-1} c_1^k \beta ||h^{-1} x|| ;$$

et donc

$$\frac{||\gamma^k x||}{||x||} \geq ||h^{-1}||^{-1} ||h||^{-1} \beta c_1^k .$$

De même, on a

$$\frac{||\gamma^{-k} x||}{||x||} \geq ||h^{-1}||^{-1} ||h||^{-1} \beta c_d^{-k} .$$

On déduit alors de l'égalité (5.3) et des deux lemmes précédents :

$$\lambda_1(k) \geq \frac{1}{4} C_\beta (\log(c_1) + \log(c_d^{-1})) k - M_1 - \frac{1}{2} (\log ||h|| + \log ||h^{-1}||) ;$$

d'où le résultat.

□

Comme la somme des  $\lambda_i$  vaut 0, on déduit de la proposition précédente :

**Corollaire 5.1.1.** *Il existe  $i$  compris entre 1 et  $d - 1$  tel que*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_i(k) - \lambda_{i+1}(k) = +\infty .$$

## 5.2 Conclusion : cas de $SL(d, \mathbb{R})$

La conclusion repose sur le fait que si la mesure harmonique  $\nu$  est de type lisse sur l'espace des drapeaux complets, alors pour chaque  $i$ , la mesure  $\nu^i$  construite dans la section 4.2 est de type lisse sur la grassmannienne. Sa dimension est alors égale à la dimension  $d_i$  de cette variété (voir l'appendice à ce sujet). Or en utilisant le Théorème 4.1 et le Corollaire 5.1.1 on voit que l'on peut construire un exemple tel qu'il existe  $i$  avec

$$\overline{\dim}_B(\nu^i) < d_i .$$

De plus, comme  $G$  agit transitivement sur  $G/P$ , le type de mesure lisse est ergodique, et comme la mesure harmonique l'est également, si elle n'est pas absolument continue, elle est singulière. On en déduit :

**Théorème 5.1.** *Soit  $\Gamma$  un sous-groupe discret Zariski-dense de  $SL(d, \mathbb{R})$ . Il existe sur  $\Gamma$  une mesure  $\mu$  symétrique dont le support engendre  $\Gamma$  et admettant un moment d'ordre 1 telle que la mesure harmonique associée  $\nu$  soit singulière par rapport au type de mesure lisse sur l'espace des drapeaux complets. De plus si  $\Gamma$  est finiment engendré,  $\mu$  peut être choisie à support fini.*

**Remarque 5.2.1.** *Bien sûr le théorème précédent n'a d'intérêt que lorsque l'ensemble limite est  $G/P$  (lorsque  $\Gamma$  est un réseau par exemple), sinon la dimension de l'ensemble limite, qui porte la mesure harmonique, est strictement inférieure à celle de  $G/P$  et la mesure harmonique ne peut pas être lisse. Dans ce cas, il serait intéressant de montrer que l'on peut rendre la dimension de la mesure harmonique aussi petite que l'on veut. Pour cela, il faudrait pouvoir rendre tous les " $\lambda_i - \lambda_{i+1}$ " aussi grands que l'on veut, et non pas un seul comme on l'a fait.*

**Remarque 5.2.2.** *En fait, l'hypothèse selon laquelle  $\Gamma$  est discret ne sert pas, sauf pour savoir que l'espace des drapeaux complets muni de la mesure  $\mu$ -stationnaire est bien la frontière de Poisson. Le théorème précédent est donc toujours valable sans cette hypothèse et en remplaçant la mesure harmonique associée  $\mu$  par la mesure  $\mu$ -stationnaire sur l'espace des drapeaux complets.*

## 5.3 Un point de vue géométrique sur cette construction

On revient dans cette section au cas général évoqué dans l'introduction de ce chapitre. On se donne un sous-groupe Zarisky-dense discret  $\Gamma$  de  $G$ . On va construire une suite  $(\mu_k)$  similaire à celle utilisée dans le cas de  $SL(d, \mathbb{R})$ . Dans ce cas, on a

montré que la différence entre deux exposants tend vers l'infini (Corollaire 5.1.1), c'est à dire qu'une des racines simples évaluée sur le vecteur des exposants  $\rho_\mu$  tend vers l'infini. Vue la formule du Théorème 4.2, c'est également ce qu'il faut faire dans le cas général si l'on veut montrer que la dimension de la mesure harmonique (ou plutôt d'une de ses projections) devient petite. Un autre moyen de montrer cela est de montrer que la vitesse de fuite  $l(G, \mu)$  de la marche aléatoire devient grande. En effet, vu le comportement de la marche aléatoire décrit par la formule (4.3),  $l(G, \mu) = \|\rho_\mu\|$ ; et on a vu que l'ensemble des racines simples constitue une base du dual  $\mathfrak{a}^*$ .

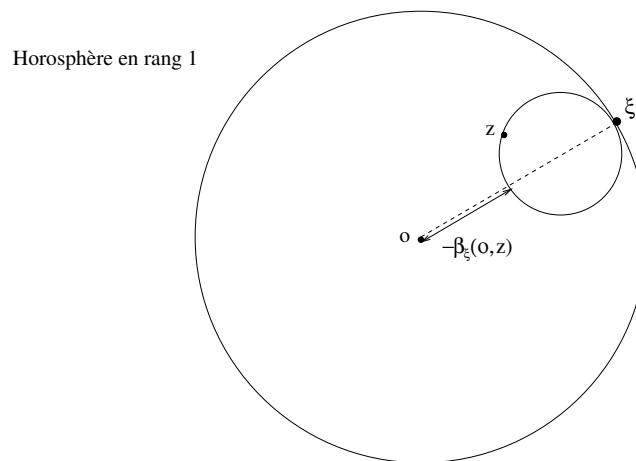
Afin d'estimer cette vitesse de fuite, on va envisager le problème sous un angle plus géométrique : le groupe  $G$  est, au centre près, la composante connexe de l'identité du groupe des isométries de l'espace symétrique  $S = G/K$ . Cet espace est de type non-compact car  $G$  est sans facteur compact (voir [Ebe96]). Après avoir donné une formule pour la vitesse de fuite, on va utiliser les propriétés de ces espaces afin d'estimer la vitesse de fuite des marches associées des mesures  $\mu_k$  construites de manière similaire à celles de la Section 5.1.

### 5.3.1 Une formule intégrale pour la vitesse de fuite

Dans cette partie, on peut élargir encore le cadre et supposer que  $G$  est le groupe des isométries d'un espace de Hadamard. On peut alors définir le cocycle de Busemann associé à un rayon géodésique  $y$  comme étant la fonction qui à  $x$  et  $z$  dans  $S$  associe la limite lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$  de la quantité  $[d(z, y(t)) - d(x, y(t))]$ . En fait, on sait ([Bal95]) que cette limite ne dépend que de la classe de  $y$  dans la sphère de visibilité. Ainsi on peut définir le cocycle de Busemann sur celle-ci en posant, pour  $\xi$  dans  $\partial S$  et  $x$  et  $z$  dans  $S$  :

$$\beta_\xi(x, z) = \lim_{n \rightarrow \infty} [d(z, y_n) - d(x, y_n)] ;$$

$(y_n)$  étant une suite d'éléments de  $S$  ayant pour limite  $\xi$ . Si l'on fixe la première coordonnée (par la suite souvent  $o$ ), les lignes de niveaux  $\{z : \beta_\xi(o, z) = c\}$  sont appelées horosphères.





La démonstration de la Proposition 2.2.1 s'applique alors de manière inchangée et l'on a :

**Proposition 5.3.1.** *Soit  $\mu$  une mesure de probabilité sur  $G$  ayant un moment d'ordre 1 et telle que les trajectoires de la marche aléatoire associée  $(x_n)$  convergent presque sûrement vers un élément  $x_\infty$  de  $\partial S$ , dont on note  $\nu$  la distribution. Alors la vitesse de fuite de cette marche est donnée par la formule*

$$l(G, \mu) = \sum_g \mu(g) \int_{\partial S} \beta_\xi(o, g^{-1}o) d\nu(\xi) .$$

### 5.3.2 Frontière de Furstenberg, cellules de Bruhat

On aura besoin de voir la frontière de Poisson sous un autre angle. Donnons tout d'abord quelques définitions complémentaires.

On appelle plat de  $S$  tout sous-espace géodésique isométrique à un espace euclidien et qui est de dimension maximale. Cette dimension est appelée le rang de  $S$  ; c'est également la dimension de  $\mathfrak{a}$  ; en effet, les plats de  $S$  sont  $Ao$  ainsi que tous ses translatés. Via l'application exponentielle, on fait correspondre aux chambres de Weyl dans  $\mathfrak{a}$  des chambres de Weil dans  $Ao$  ;  $A^+o$  est la chambre de  $Ao$  correspondant à  $\mathfrak{a}^+$ . L'ensemble des chambres de Weyl de  $S$  est l'orbite de  $A^+o$  sous  $G$  (les notations sont celles introduites dans les préliminaires du Chapitre 4).

Un élément de  $\mathfrak{a}$  est dit régulier s'il est contenu dans une chambre de Weyl, c'est à dire s'il n'annule aucune des racines. Un vecteur tangent quelconque à  $S$  est régulier s'il est l'image par un élément de  $G$  d'un élément régulier de  $\mathfrak{a}$ . Une géodésique est dite régulière si ses vecteurs directeurs le sont. Elle a alors la propriété d'être contenue dans un unique plat. Un élément  $\xi$  de  $\partial S$  est dit régulier si la géodésique joignant  $o$  à  $\xi$  est régulière.

**Définition 5.3.1.** ([Mos73], voir aussi l'appendice 5 de [BGS85]) *On appelle frontière de Furstenberg, notée  $\mathcal{F}$ , l'ensemble des classes d'équivalence des chambres de Weyl pour la relation suivante : deux chambres sont équivalentes si elles se trouvent à une distance de Hausdorff finie l'une de l'autre.*

Cet espace va nous être utile pour appréhender la frontière de Poisson ; en effet :

**Proposition 5.3.2.** ([Mos73]) *La frontière de Furstenberg est isomorphe à  $G/P$ .*

Explicitons le passage de la frontière de Poisson vue comme une orbite  $G\xi_{\rho_\mu}$  (section 4.1.3) à cette même frontière vue comme  $\mathcal{F}$ . On peut le faire de la manière suivante : si  $\xi$  est un élément régulier de  $\partial S$ , et si  $y$  est la géodésique joignant  $o$  à  $\xi$ ,  $y$  est contenue dans une unique chambre de Weyl basée en  $o$  ; on note  $f(\xi)$  la classe de cette chambre dans la frontière de Furstenberg. Si l'on munit l'ensemble des classes des chambres de Weyl de l'action naturelle de  $G$ , on a ainsi construit un isomorphisme  $G$ -équivariant entre  $G\xi_{\rho_\mu}$  et cet espace. L'espace  $\mathcal{F}$  muni de l'image par l'application précédente de la mesure  $\nu$ , que l'on notera toujours  $\nu$ , est alors isomorphe à la frontière de Poisson de la marche.

On précise maintenant la structure de  $\mathcal{F}$  en utilisant la décomposition de Bruhat :

$$G = \bigcup PwP ;$$

l'union (disjointe) étant prise sur l'ensemble des éléments  $w$  du groupe de Weyl (on choisit un représentant pour chaque). On note  $f_0$  l'élément de  $\mathcal{F}$  associé à la chambre  $A^+o$ . Cette décomposition induit alors une décomposition de  $\mathcal{F} = G/P$  selon les orbites sous  $P$  des chambres  $wf_0$ . Ces orbites sont appelées cellules de Bruhat.

Deux éléments de  $f$  et  $f'$  de  $\mathcal{F}$  sont dits en opposition s'il existe un plat dans lequel une chambre  $c$  est dans la classe de l'un tandis que  $-c$  est dans la classe de l'autre ; un tel plat est alors unique, on le note  $F(f, f')$ . On va s'intéresser ici à la cellule dite principale  $Pw_0f_0$ , où l'on a noté  $w_0$  un représentant de l'élément de  $W$  qui envoie  $f_0$  sur la chambre en opposition contenue dans  $Ao$ . La cellule  $Pw_0f_0$  est alors l'ensemble des classes des chambres en opposition avec  $f_0$ .

Dans le cas de  $SL(d, \mathbb{R})$ ,  $w_0$  correspond à la matrice de permutation qui a des 1 sur l'antidiagonale et des 0 ailleurs (avec éventuellement un  $-1$  suivant la parité de  $d$  pour que le déterminant reste égal à 1).

**Proposition 5.3.3.** *L'application de  $P$  dans  $Pw_0f_0$  qui à  $p$  associe  $pw_0f_0$  induit un homéomorphisme entre  $N$  et  $Pw_0f_0$ .*

Ceci nous permet en particulier de connaître la dimension de cette cellule. On montre (voir [Hel78]) que cette cellule est l'unique cellule de dimension maximale et qu'elle forme un ouvert dense de  $\mathcal{F}$ , l'ensemble des cellules formant un complexe.

On définit maintenant la fonction  $\Phi_0$  sur  $\mathcal{F}$  :

$$\Phi_0(f) = \begin{cases} d(o, F(f_0, f)) & \text{si } f \in Pw_0f_0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

On a alors :

**Lemme 5.3.1.** *Les ensembles  $\{f \in \mathcal{F} : \Phi_0(f) \geq C\}$  sont des fermés.*

*Démonstration.* La fonction  $\Phi_0$  est finie sur la cellule principale  $Pw_0f_0$  associée à  $f_0$ . Vue la Proposition 5.3.3, on peut alors relever  $\Phi_0$  en une application  $\tilde{\Phi}_0$  de  $N$  dans  $\mathbb{R}$ . Quelle forme prend alors  $\Phi_0$  ? On remarque que le plat joignant  $f_0$  à  $nw_0f_0$  est en fait  $nAo$ . Donc on a

$$\tilde{\Phi}_0(n) = d(o, nAo) .$$

Compte-tenu de la continuité de la section de  $Pw_0f_0$  et de celle de l'action de  $G$  sur  $S$ , on en déduit que  $\Phi_0$  est continue sur  $Pw_0f_0$ .

Il faut ensuite s'assurer que lorsqu'une suite  $(f_k)$  d'éléments de  $Pw_0f_0$  converge vers un élément d'une autre cellule, alors  $\Phi_0(f_k)$  tend vers l'infini. Si cette quantité est bornée, alors (avec les notations précédentes)  $(d(n_k^{-1}o, Ao))$  est bornée et  $(n_k)$  reste dans un compact de  $N$  donc  $(f_k)$  reste dans un compact de  $Pw_0f_0$ .  $\square$

**Remarque 5.3.1.** *On a défini les cellules de Bruhat associées à  $f_0$ , mais ce qui précède reste valable si l'on fixe un autre élément  $f$  de  $\mathcal{F}$ , la cellule principale étant définie comme l'ensemble des classes des chambres de Weyl en opposition avec  $f$ .*

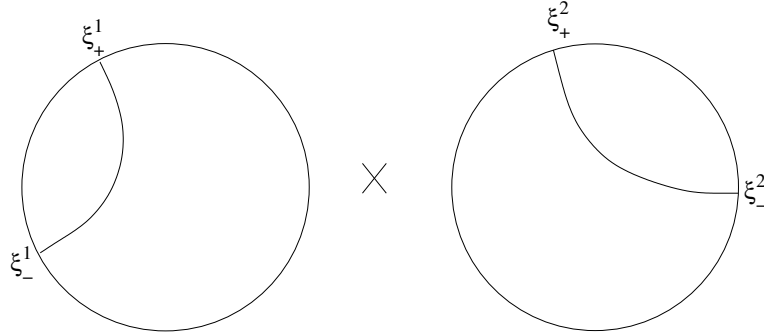
Revenons à la mesure harmonique : sous l'hypothèse selon laquelle le sous-groupe  $\Gamma$  engendré par le support de  $\mu$  est Zarisky-dense, la mesure harmonique  $\nu$  possède la propriété suivante ([GR85], voir aussi [Kai00]) :

**Proposition 5.3.4.** *Si l'on fixe  $f$  dans  $\mathcal{F}$ , la cellule de Bruhat principale associée est de  $\nu$ -mesure 1.*

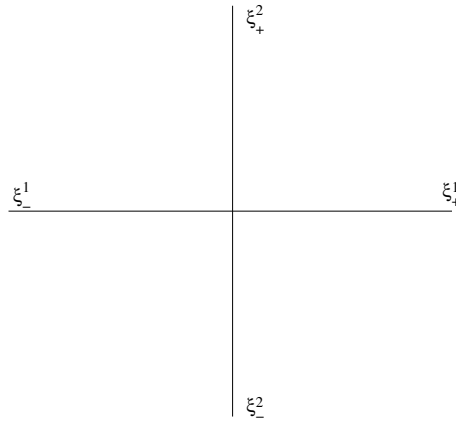
Cette propriété est également une conséquence du fait que le complémentaire de la cellule principale est un sous-ensemble algébrique strict, qui est donc de  $\nu$ -mesure nulle ([GM89]). Dans le cas de  $SL(d, \mathbb{R})$ , il s'agit de l'ensemble des drapeaux qui ne sont pas en opposition avec celui associé à  $f$ .

### 5.3.3 Une illustration : le cas du bidisque

On illustre ici ce qui précède sur la distance entre  $o$  et les plats dans le cas de  $G = SL(2, \mathbb{R}) \times SL(2, \mathbb{R})$ , l'espace symétrique associé étant le bidisque  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$  muni de la structure riemannienne produit. Cet exemple présente l'avantage que l'on peut dessiner le bord de Furstenberg et visualiser la cellule principale.



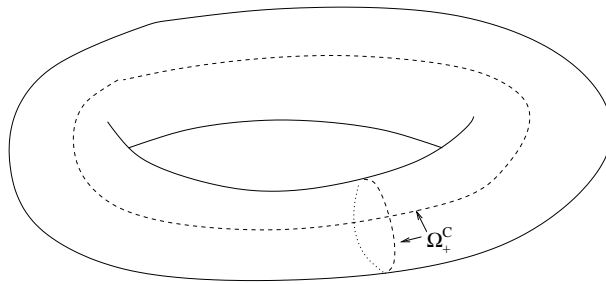
Dans ce cadre, les plats correspondent au produit riemannien de deux géodésiques :



Les chambres de Weyl de ce plat sont les 4 quartiers délimités par les géodésiques initiales. Un élément du bord de Furstenberg est représenté par un couple dans  $\partial\mathbb{H}^2 \times \partial\mathbb{H}^2$ . Ainsi ce bord est un tore.

Fixons nous un tel élément  $(\xi_+^1, \xi_+^2)$  du bord de Furstenberg identifié à  $\partial\mathbb{H}^2 \times \partial\mathbb{H}^2$  ; et notons  $\Omega_+$  la cellule principale associée. Les chambres en opposition avec celles

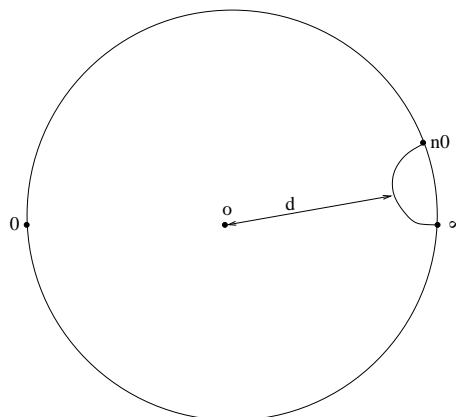
dont la classe est  $(\xi_+^1, \xi_+^2)$  sont celles dont la projection  $(\xi^1, \xi^2)$  dans le bord de Furstenberg vérifie :  $\xi^1 \neq \xi_+^1$  et  $\xi^2 \neq \xi_+^2$ . Cela revient à dire que  $\Omega_+^C$  est la réunion de deux cercles dans le tore :  $\xi_+^1 \times \partial\mathbb{H}^2$  et  $\partial\mathbb{H}^2 \times \xi_+^2$ .



Caractérisons maintenant le fait qu'un plat soit loin de l'origine. Si la classe d'une chambre, notée  $(\xi^1, \xi^2)$ , est proche de  $\Omega_+^C$ , cela signifie que  $\xi^1$  est proche de  $\xi_+^1$  et que  $\xi^2$  est proche de  $\xi_+^2$  (car la topologie sur le bord de Furstenberg coïncide avec la topologie produit). Supposons par exemple que  $\xi_+^1 = \infty$ . Si l'on écrit un élément de  $\partial\mathbb{H}^2 \setminus \xi_+^1$  (c'est à dire  $\mathbb{R}$ ) sous la forme  $n.0$ ,  $n \in N$ , on a  $n.0 = t$ , où on a noté

$$n = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Et pour que  $n.0 \rightarrow \infty$ , il faut  $t \rightarrow \infty$ . Mais alors  $d(o, nAo) \rightarrow \infty$  (ce qu'illustre le dessin qui suit) et par conséquent la distance entre  $o$  et le plat joignant  $(\xi^1, \xi^2)$  à  $(\xi_+^1, \xi_+^2)$  tend vers l'infini.



### 5.3.4 Choix de l'élément $\gamma$

On se donne pour la suite de cette section une mesure de probabilité  $\mu$  sur  $\Gamma$  symétrique, dont le support engendre  $\Gamma$  et admettant un moment d'ordre 1. On va utiliser comme dans le cas de  $SL(d, \mathbb{R})$  une suite de mesures de la forme

$$\mu_k = \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{4}(\delta_{\gamma^k} + \delta_{\gamma^{-k}}) .$$

On a besoin de précisions sur l'élément  $\gamma$  choisi. On étend pour cela les définitions de la partie 5.1.1.

**Définition 5.3.2.** *Un élément de  $G$  est dit semi-simple si  $Ad(g)$  est semi-simple en tant qu'élément de  $GL(\mathfrak{g})$ .*

**Définition 5.3.3.** *Un élément semi-simple de  $G$  est dit hyperbolique (resp. elliptique) si les valeurs propres de  $Ad(g)$  sont réelles (resp. de module 1).*

Tout élément semi-simple  $g$  se décompose :  $g = fh$ , avec  $f$  elliptique,  $h$  hyperbolique, et  $fh = hf$ . On aura besoin de connaître la façon dont ces éléments agissent sur  $S$ . Pour cela, on définit la fonction de déplacement associée à une isométrie  $g$  :  $d_g(p) = d(p, gp)$ .

**Définition 5.3.4.** *On dit qu'une isométrie  $g$  est axiale si  $d_g$  a un minimum (atteint) strictement positif.*

On a alors (voir [Ebe96]) :

**Proposition 5.3.5.** *Une isométrie  $g$  est axiale si et seulement si elle est semi-simple non-elliptique.*

Si  $g$  est axiale, le lieu où  $d_g$  atteint son minimum est un convexe totalement géodésique (voir [Ebe96]) sur lequel  $g$  agit par translation, appelé son axe.

**Définition 5.3.5.** *Une isométrie hyperbolique  $h$  s'écrit  $h = e^H$  avec  $H \in \mathfrak{p}$ . On dit que  $h$  est régulier si  $H$  est conjugué à un élément de  $\mathfrak{a}^+$ .*

**Définition 5.3.6.** ([Ben97]) *Un élément de  $G$  est  $\mathbb{R}$ -régulier si et seulement si sa composante hyperbolique (dans la décomposition de Jordan) est régulière.*

Comme  $\Gamma$  est Zariski-dense, il existe dans  $\Gamma$  un élément  $\mathbb{R}$ -régulier ([BL93]) (en fait, l'ensemble de ces éléments est Zariski-dense). Or les éléments  $\mathbb{R}$ -réguliers sont semi-simples ; il existe donc dans  $\Gamma$  un élément  $\gamma$  semi-simple dont la composante hyperbolique est régulière. On fixe un tel  $\gamma$  pour la suite.

Notons  $C$  l'axe de  $\gamma$  ;  $C$  est la réunion de géodésiques parallèles, translatées par  $\gamma$ . De plus,  $C$  est en fait un plat car  $\gamma$  est  $\mathbb{R}$ -régulier. Pour tout point  $x$  de  $S$ ,  $(\gamma^n x)$  admet lorsque  $n$  tend vers plus ou moins l'infini une limite dans  $\partial S$  ne dépendant pas de  $x$ , que l'on note  $\gamma_{\pm}$ . Comme  $\gamma$  est  $\mathbb{R}$ -régulier, ces points sont dans  $\partial S^{reg}$ .

### 5.3.5 Estimation de la vitesse de fuite

Les hypothèses de la Proposition 5.3.1 sont bien sûr vérifiées par la marche aléatoire associée à  $\mu_k$  ; ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} l(G, \mu_k) &= \sum_g \mu_k(g) \int_{\partial S} \beta_{\xi}(o, g^{-1}o) d\nu_k(\xi) \\ &= \frac{1}{2} \sum_g \mu(g) \int_{\partial S} \beta_{\xi}(o, g^{-1}o) d\nu_k(\xi) + \frac{1}{4} \int_{\partial S} \left( \beta_{\xi}(o, \gamma_k) + \beta_{\xi}(o, \gamma_{-k}) \right) d\nu_k(\xi) . \end{aligned}$$

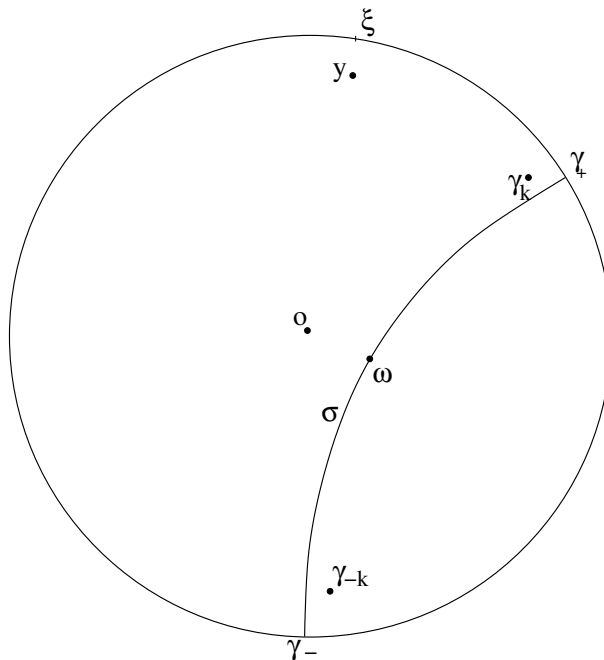
Comme  $|\beta_{\xi}(o, g^{-1}o)|$  est majoré par  $|g|$ , le premier terme de cette somme est majoré indépendamment de  $k$ . Il existe donc une constante  $M_1$  telle que

$$l(G, \mu_k) \geq \frac{1}{4} \int_{\partial S} \left( \beta_{\xi}(o, \gamma_k) + \beta_{\xi}(o, \gamma_{-k}) \right) d\nu_k(\xi) - M_1 . \quad (5.4)$$

On va s'occuper par la suite du premier terme de cette somme.

**Minoration de  $\beta_\xi(o, \gamma_k) + \beta_\xi(o, \gamma_{-k})$** 

On reprend les notations du 5.3.4. On note par ailleurs  $d_0$  l'amplitude de la translation de  $\gamma$  sur son axe  $C$ ,  $\omega$  le projeté de  $o$  sur  $C$ ,  $\sigma$  la géodésique joignant  $\gamma_+$  à  $\gamma_-$  telle que  $\sigma(0) = \omega$ . On note  $\gamma_{\pm k} = \gamma^{\pm k} o$ .



On montre tout d'abord, grace à la convexité de la distance, que cette quantité est bornée inférieurement par une constante :

**Proposition 5.3.6.** *Pour tout  $k$  et pour tout  $\xi$  dans  $\partial S$ , on a*

$$\beta_\xi(o, \gamma_k) + \beta_\xi(o, \gamma_{-k}) \geq -4d(\omega, o) . \quad (5.5)$$

*Démonstration.* On a

$$\beta_\xi(o, \gamma_k) + \beta_\xi(o, \gamma_{-k}) = \lim_{y \rightarrow \xi} [d(y, \gamma_k) + d(y, \gamma_{-k}) - 2d(y, o)] .$$

En se servant du fait que

$$d(y, \gamma_k) \geq d(y, \sigma(kd_0)) - d(o, \omega) ,$$

on obtient

$$d(y, \gamma_k) + d(y, \gamma_{-k}) - 2d(y, o) \geq d(y, \sigma(kd_0)) + d(y, \sigma(-kd_0)) - 2d(y, \omega) - 4d(\omega, o) .$$

Or pour chaque  $y$ , la fonction  $x \mapsto d(x, y)$  est convexe ; en particulier la fonction  $t \mapsto d(\sigma(t), y)$  est convexe et donc

$$d(y, \sigma(kd_0)) + d(y, \sigma(-kd_0)) - 2d(y, \omega) \geq 0 ;$$

d'où

$$\beta_\xi(o, \gamma_k) + \beta_\xi(o, \gamma_{-k}) \geq -4d(\omega, o) .$$

□

On va ensuite montrer que sur un ensemble dont la  $\nu_k$ -mesure reste "assez grande" quel que soit  $k$ , cette quantité tend vers l'infini.

### Estimation de $\beta_\xi(o, \gamma_k)$

Posons

$$\Omega_\pm = \{f \in \mathcal{F} : f \text{ est en opposition avec } f(\gamma_\pm)\} ;$$

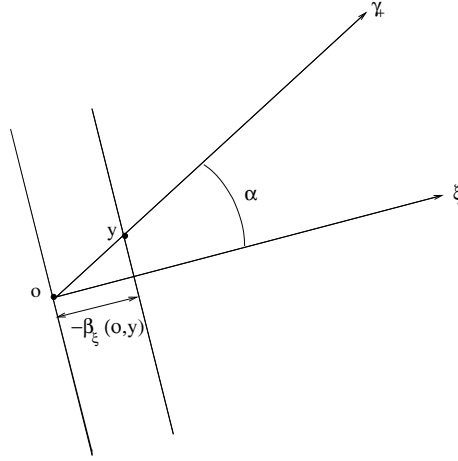
et  $\Omega = \Omega_+ \cap \Omega_-$ . On a vu (Proposition 5.3.4) que quel que soit  $k$ ,  $\nu_k(\Omega) = 1$ .

Rappelons qu'étant donnés deux éléments  $f$  et  $f'$  de  $\mathcal{F}$  en opposition, on note  $F(f, f')$  le plat pour lequel  $f$  et  $f'$  sont les classes respectives de deux chambres opposées.

On va se ramener à calculer la croissance des quantités  $\beta_\xi(o, \gamma_k)$  dans des plats adaptés. En effet, on sait estimer le cocycle de Busemann dans  $\mathbb{R}^r$  :

**Lemme 5.3.2.** *Dans  $\mathbb{R}^r$ , si  $\xi$  est un point de la sphère à l'infini et  $y$  un rayon géodésique passant par  $o$  faisant un angle  $\alpha$  avec le rayon géodésique joignant  $o$  à  $\xi$ , alors*

$$\beta_\xi(o, y(t)) = \cos(\pi - \alpha)t .$$



La proposition suivante utilise le fait que pour l'estimation de  $\beta_\xi(o, \gamma_k)$  on peut, moyennant une erreur qu'il faudra contrôler, se placer dans le plat  $F(f(\gamma_+), f(\xi))$ .

**Proposition 5.3.7.** *Soit  $\xi$  dans  $\Omega$  ; on note  $o'$  le projeté de  $o$  sur  $F(f(\gamma_+), f(\xi))$  et  $\alpha$  l'angle entre les rayons géodésiques joignant  $o'$  à  $\gamma_+$  et  $\xi$ . Alors quel que soit  $k \geq 0$ , on a*

$$\beta_\xi(o, \gamma_k) \geq \cos(\pi - \alpha)kd_0 - 2d(o, o') - 2d(o, \omega) .$$

*Démonstration.* On note  $\sigma'$  le rayon géodésique joignant  $o'$  à  $\gamma_+$  dans  $F(f(\gamma_+), f(\xi))$ . On a alors

$$\beta_\xi(o, \gamma_k) \geq \beta_\xi(o', \sigma'(kd_0)) - d(\gamma_k, \sigma'(kd_0)) - d(o, o') .$$

Or

$$\beta_\xi(o', \sigma'(kd_0)) = \cos(\pi - \alpha)kd_0 ;$$

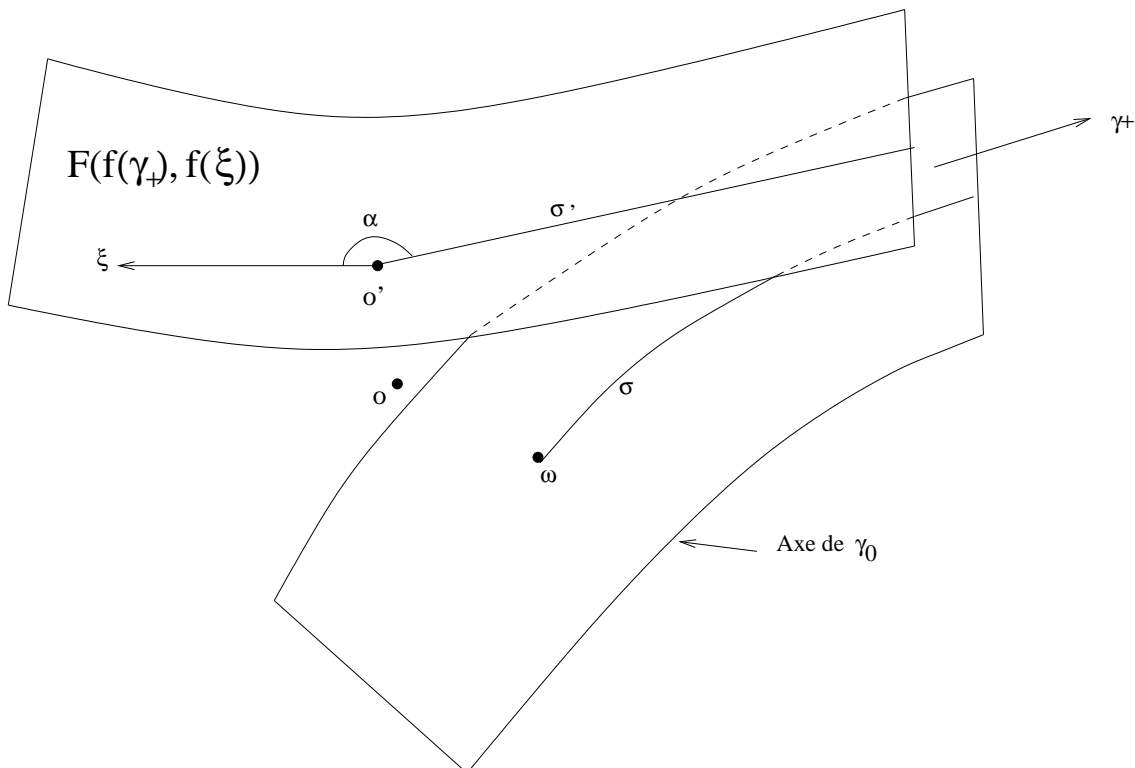
et

$$d(\gamma_k, \sigma'(kd_0)) \leq d(\gamma_k, \gamma_0^k \omega) + d(\sigma'(kd_0), \sigma(kd_0)) .$$

En se servant du fait que la fonction  $t \rightarrow d(\sigma(t), \sigma'(t))$  est décroissante, on obtient

$$d(\gamma_k, \sigma'(kd_0)) \leq 2d(o, \omega) + d(o, o') .$$

□



Notons que dans l'inégalité de la proposition précédente,  $\cos(\pi - \alpha)$  dépend de  $\xi$  ; or on veut une croissance uniforme de  $\beta_\xi(o, \gamma_k)$  sur un ensemble dont la  $\nu_k$ -mesure reste plus grande qu'une constante. On fait alors la remarque suivante : dans le plat  $F(f(\gamma_+), f(\xi))$ , les rayons géodésiques joignant  $o'$  à  $\xi$  et  $o'$  à  $\gamma_+$  sont dans deux chambres de Weyl opposées ; or on a :

**Lemme 5.3.3.** *Etant donné un rayon géodésique intérieur à une chambre de Weyl, un rayon situé dans une chambre opposée fait avec le précédent un angle minoré par une constante strictement supérieure à  $\pi/2$ .*

*Démonstration.* Tous les plats et les chambres de Weyl étant isométriques, on peut se ramener au cas de  $\mathfrak{a}^+$  et de sa chambre opposée. Notons, pour chaque racine  $\alpha$ ,  $H_\alpha$  l'élément de  $\mathfrak{a}$  tel que pour tout  $X$  dans  $\mathfrak{a}$ ,  $\alpha(X) = B(X, H_\alpha)$ . Rappelons (relation (4.1)) que la chambre  $\mathfrak{a}^+$  est définie par :

$$\mathfrak{a}^+ = \{X \in \mathfrak{a} : \forall \alpha \in \Delta, B(H_\alpha, X) > 0\} ;$$

et la chambre opposée par la condition inverse. Or on connaît la position relative de ces racines (voir par ex. [Ebe96]) : pour tous  $\alpha, \beta$  dans  $\Delta$ ,  $B(H_\alpha, H_\beta) < 0$ . On note maintenant  $H_1, \dots, H_{d-1}$  les éléments de  $\Delta$ .

On se ramène tout d'abord au cas où les racines font des angles  $\pi/2$  entre elles. Pour cela, on orthogonalise la base  $(H_i)$  par la méthode de Gramm-Schmidt :  $H'_1 = H_1$  puis

$$H'_i = H_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{B(H'_j, H_i)}{B(H'_j, H'_j)} H'_j .$$



On montre alors par récurrence que  $r'_i$  est une combinaison linéaire à coefficients positifs des  $H_j$ ,  $j \leq i$  (c'est ici que sert notre connaissance de la position relative des racines).

Prenons maintenant un élément  $v^+$  de  $\mathfrak{a}^+$  et un élément  $v^-$  de la chambre opposée. On a

$$B(H'_i, v^+) = B(H_i, v^+) - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{B(H'_j, H_i)}{B(H'_j, H'_j)} B(H'_j, v^+) ;$$

et vue la remarque précédente, on a  $B(H'_i, v^+) > 0$  ; de même  $B(H'_i, v^-) < 0$ . En termes géométriques, on a inclu le cône  $\mathfrak{a}^+$  (et son opposé) dans un cône dont les parois sont des hyperplans définis par un système de vecteurs orthogonaux.

On se place maintenant dans ce cas :  $H_1, \dots, H_{d-1}$  sont supposés orthonormés. Si  $v^+$  vérifie  $B(H_i, v^+) > 0$  pour chaque  $i$  et  $v^-$  vérifie  $B(H_i, v^-) < 0$  pour chaque  $i$ , alors

$$B(v^+, v^-) = \sum_i B(H_i, v^+) B(H_i, v^-) < 0 .$$

De plus si on fixe  $v^+$  et si  $v^-$  parcourt la chambre opposée à  $\mathfrak{a}^+$  et reste de norme 1, alors la quantité  $B(v^+, v^-)$  est majorée par une constante  $c < 0$  et donc l'angle entre  $v^+$  et  $v^-$  est minoré par une constante  $\alpha_0 > \pi/2$ .  $\square$

Ainsi il existe une constante  $C > 0$ , qui ne dépend pas de  $k$ , telle que dans la Proposition 5.3.7, quel que soit  $\xi$  dans  $\Omega$ ,  $\cos(\pi - \alpha) \geq C$ . Par ailleurs, on a une propriété analogue à celle de cette proposition avec  $\gamma_-$ . On obtient ainsi une constante  $C > 0$  telle que, lorsque  $\xi$  est dans  $\Omega$  et pour  $k \geq 0$ ,

$$\beta_\xi(o, \gamma_k) + \beta_\xi(o, \gamma_{-k}) \geq C d_0 k - 2d(o, F(f(\gamma_+), f(\xi))) - 2d(o, F(f(\gamma_-), f(\xi))) - 4d(o, \omega) . \quad (5.6)$$

Vue l'équation précédente, il nous reste à contrôler la quantité  $d(o, F(f(\gamma_+), f(\xi)))$ , plus précisément à montrer qu'elle reste bornée sur un ensemble dont la  $\nu_k$ -mesure reste plus grande qu'une constante.

**Remarque 5.3.2.** *Remarquons l'analogie avec le cas hyperbolique : dans ce cas, le Lemme 2.4.1 et la proposition qui suit servent à majorer le produit de Gromov  $(\gamma_+ | \xi)$  ; mais ce produit peut être vu, à une constante près, comme la distance de  $o$  à la géodésique (qui joue le rôle de plat en rang 1) joignant  $\gamma_+$  à  $\xi$ .*

On définit pour cela, comme dans la partie 5.3.2, les fonctions  $\Phi_+$  et  $\Phi_-$  sur  $\mathcal{F}$  :

$$\Phi_\pm(f) = \begin{cases} d(o, F(f(\gamma_\pm), f)) & \text{si } f \in \Omega_\pm \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Puis on pose  $O_c = \{\Phi_- \geq c\} \cup \{\Phi_+ \geq c\}$ . On va montrer qu'il existe  $c_0$  tel que quel que soit  $k$ ,  $\nu_k(\mathcal{F} \setminus O_{c_0})$  est minoré par une constante strictement positive. Grâce au Lemme 5.3.1, on sait que les  $O_c$  sont des fermés.

**Proposition 5.3.8.** *Il existe  $c$  tel que l'intersection de  $\mathcal{F} \setminus O_c$  avec l'ensemble limite  $\Lambda_\Gamma$  associé à  $\Gamma$  soit non vide.*

*Démonstration.* Supposons que quel que soit  $N$ ,  $(\mathcal{F} \setminus O_N) \cap \Lambda_\Gamma = \emptyset$ . Alors on a, comme  $\Lambda_\Gamma$  est le support de  $\nu$ ,

$$\nu\left(\bigcup_N \mathcal{F} \setminus O_N\right) = 0 .$$

Or cette union est égale à l'intersection de l'ensemble des chambres en opposition avec  $f(\gamma_+)$  ( $\Omega_+$ ) et de l'ensemble de celles en opposition avec  $f(\gamma_-)$  ( $\Omega_-$ ), qui sont deux ensemble de  $\nu$ -mesure 1 (Proposition 5.3.4).  $\square$

En se servant de la minimalité de l'ensemble limite on obtient alors :

**Proposition 5.3.9.** *Avec les notations précédentes, il existe  $c$  et une constante  $L > 0$  tels que quel que soit  $k$*

$$\nu_k(\mathcal{F} \setminus O_c) \geq L .$$

*Démonstration.* On prend  $c$  comme dans la proposition précédente ; puis on utilise le Corollaire 4.1.1 qui donne l'existence d'éléments  $\gamma_1, \dots, \gamma_r$  de  $G$  tels que

$$\Lambda_G \subset \bigcup_i \gamma_i \mathcal{F} \setminus O_c .$$

Comme  $\mu_k = \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{4}(\delta_{\gamma^k} + \delta_{\gamma^{-k}})$  et  $\nu_k$  est  $\mu_k$ -stationnaire, on a pour tout  $s$

$$\nu_k(\mathcal{F} \setminus O_c) \geq \frac{1}{2^s} \sum_{g \in \text{supp}(\mu^s)} \mu^s(g) \nu_k(g \mathcal{F} \setminus O_c) ;$$

et si on choisit  $s$  tel que tous les  $\gamma_i$  soient dans le support de  $\mu^s$ ,

$$\nu_k(\mathcal{F} \setminus O_c) \geq \frac{1}{2^s} \sum_i \mu^s(\gamma_i) \nu_k(\gamma_i \mathcal{F} \setminus O_c) \geq \frac{1}{2^s} \min_i \mu^s(\gamma_i) .$$

D'où le résultat en notant

$$L = \frac{1}{2^s} \min_i \mu^s(\gamma_i) .$$

$\square$

### Retour à la vitesse de fuite

On déduit de ce qui précède, en adoptant les mêmes notations :

**Proposition 5.3.10.** *La suite des vitesses de fuite de  $(\mu_k)$  vérifie*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} l(G, \mu_k) = +\infty .$$

*Démonstration.* On a en effet en utilisant (5.4) et (5.5)

$$l(G, \mu_k) \geq \frac{1}{4} \int_{O_{N_0}} \left( \beta_\xi(o, \gamma_k) + \beta_\xi(o, \gamma_{-k}) \right) d\nu_k(\xi) - M_1 - d(o, \omega) .$$

Puis, en utilisant (5.6, d'où vient la constante  $C$ ) et la Proposition 5.3.9 (qui associe  $L$  à  $N_0$ ),

$$l(G, \mu_k) \geq \frac{1}{4} L C d_0 k - M_1 - 2d(o, \omega) - N_0 .$$

$\square$

## 5.4 Conclusion dans le cas général

On a remarqué dans l'introduction de la Section 5.3 que la proposition précédente entraîne que pour une des racines simples  $\alpha$ , la suite  $(\alpha(\rho_{\mu_k}))_k$  tend vers l'infini lorsque  $k$  devient grand.

Etant donné un groupe  $G$  linéaire algébrique semi-simple connexe, sans facteur compact, et à centre fini, en se servant de ce qui précède et du Théorème 4.2, et en appliquant le même raisonnement que dans la Section 5.2, on obtient l'analogie du Théorème 5.1 :

**Théorème 5.2.** *Soit  $\Gamma$  un sous-groupe discret Zariski-dense de  $G$ . Il existe sur  $\Gamma$  une mesure  $\mu$  symétrique dont le support engendre  $\Gamma$  et admettant un moment d'ordre 1 telle que la mesure harmonique associée  $\nu$  soit singulière par rapport au type de mesure lisse sur  $G/P$ . De plus si  $\Gamma$  est finiment engendré,  $\mu$  peut être choisie à support fini.*

# Chapitre 6

## Appendice : dimension

La dimension la plus couramment utilisée est celle de Hausdorff, mais on aura besoin d'en utiliser d'autres. On rappelle ici ces diverses définitions de la dimension d'un ensemble ou d'une mesure. La référence principale est [Pes97], dont on adopte les conventions.

### 6.1 Généralités

#### 6.1.1 Dimension des ensembles

On se donne un espace métrique complet  $(X, d)$ .  
Pour  $\alpha > 0$ ,  $Z \subset X$  et  $\epsilon > 0$ , on considère la quantité

$$\inf \left\{ \sum_{U \in \mathcal{G}_\epsilon} (\text{diam}(U))^\alpha \right\} ;$$

la borne inférieure étant prise sur l'ensemble des recouvrements  $\mathcal{G}_\epsilon$  de  $Z$  par des ouverts de diamètre inférieur ou égal à  $\epsilon$ . Clairement c'est une fonction croissante de  $\epsilon$ . On peut donc poser

$$m_H(Z, \alpha) = \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \sum_{U \in \mathcal{G}_\epsilon} (\text{diam}(U))^\alpha \right\} .$$

On montre ensuite qu'il existe  $\alpha_0$  tel que

- si  $\alpha > \alpha_0$ , alors  $m_H(Z, \alpha) = 0$  ;
- si  $\alpha < \alpha_0$ , alors  $m_H(Z, \alpha) = +\infty$ .

On pose alors

$$\dim_H(Z) = \inf \{ \alpha : m_H(Z, \alpha) = 0 \} = \sup \{ \alpha : m_H(Z, \alpha) = +\infty \} . \quad (6.1)$$

Cette quantité est appelée dimension de Hausdorff de  $Z$ .

On considère ensuite la quantité

$$\inf \left\{ \sum_{U \in \mathcal{G}_\epsilon} (\text{diam}(U))^\alpha \right\} ;$$

la borne inférieure étant cette fois prise sur l'ensemble des recouvrements  $\mathcal{G}_\epsilon$  de  $Z$  par des ouverts de diamètre égal à  $\epsilon$ . Il n'est plus clair que c'est une fonction croissante de  $\epsilon$ . On pose alors

$$\begin{aligned} - \overline{m}_H(Z, \alpha) &= \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \inf \left\{ \sum_{U \in \mathcal{G}_\epsilon} (\text{diam}(U))^\alpha \right\}; \\ - \underline{m}_H(Z, \alpha) &= \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \inf \left\{ \sum_{U \in \mathcal{G}_\epsilon} (\text{diam}(U))^\alpha \right\}. \end{aligned}$$

Puis on définit de la même manière qu'en (6.1) les "upper et lower box dimension" de  $Z$ ,  $\overline{\dim}_B(Z)$  et  $\underline{\dim}_B(Z)$ . Ces définitions ont pour conséquence directe

$$\dim_H(Z) \leq \underline{\dim}_B(Z) \leq \overline{\dim}_B(Z) .$$

On dispose d'un premier moyen d'estimer ces "box" dimensions (voir [Pes97])

**Proposition 6.1.1.** *Notons  $N(Z, \epsilon)$  le nombre minimum de boules de diamètre  $\epsilon$  nécessaire pour recouvrir  $Z$ . On a alors*

$$\begin{aligned} \underline{\dim}_B(Z) &= \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(Z, \epsilon)}{\log 1/\epsilon} ; \\ \overline{\dim}_B(Z) &= \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(Z, \epsilon)}{\log 1/\epsilon} . \end{aligned}$$

## 6.1.2 Dimension des mesures

Soit  $\mu$  une mesure (borélienne) de probabilité sur  $(X, d)$ . On pose :

$$\begin{aligned} \dim_H \nu &= \inf \{ \dim_H Z : \nu(Z) = 1 \} ; \\ \underline{\dim}_B \nu &= \liminf_{\delta \rightarrow 0} \{ \underline{\dim}_B Z : \nu(Z) \geq 1 - \delta \} ; \\ \overline{\dim}_B \nu &= \liminf_{\delta \rightarrow 0} \{ \overline{\dim}_B Z : \nu(Z) \geq 1 - \delta \} . \end{aligned}$$

On a également

$$\dim_H \leq \underline{\dim}_B \nu \leq \overline{\dim}_B \nu .$$

L'estimation de la dimension d'un ensemble, et a fortiori de celle d'une mesure vue les définitions précédentes, est généralement compliquée. Afin d'évaluer plus directement la dimension d'une mesure, on introduit les dimensions ponctuelles inférieure et supérieure en un point  $x$  :

$$\underline{\dim}_P \nu(x) = \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\log \nu B(x, r)}{\log r} \quad \text{et} \quad \overline{\dim}_P \nu(x) = \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\log \nu B(x, r)}{\log r} .$$

Ces dimensions ponctuelles nous permettrons d'estimer celle de Hausdorff moyennant une condition sur  $(X, d)$  :

**Définition 6.1.1.** *Un espace métrique  $(X, d)$  est dit de multiplicité finie s'il existe  $K > 0$  et  $\epsilon_0 > 0$  tels que pour tout  $\epsilon \in ]0, \epsilon_0[$  et pour tout  $Z \subset X$ , il existe un recouvrement de  $Z$  par des boules centrées en  $Z$  de rayon  $\epsilon$  de multiplicité  $K$  (c'est à dire tel que tout point soit au plus dans  $K$  boules).*

**Proposition 6.1.2.** *Soit  $(X, d)$  un espace de multiplicité finie. Soit  $\nu$  une mesure de probabilité sur  $X$ . S'il existe une constante  $d$  telle que  $\overline{\dim}_P \nu(x) \leq d$   $\nu$ -presque sûrement, alors  $\overline{\dim}_B \nu \leq d$ .*

*Démonstration.* Notons  $\Delta$  l'ensemble de  $\nu$ -mesure 1 sur lequel  $\overline{\dim}_P \nu(x) \leq d$ . Pour tout  $\delta > 0$  et pour chaque  $x$  dans  $\Delta$ , il existe  $r_\delta(x)$  tel que si  $r \leq r_\delta(x)$ , alors

$$\frac{\log \nu B(x, r)}{\log r} \leq d + \delta ;$$

et donc  $\nu B(x, r) \geq r^{d+\delta}$ . Notons alors  $\Delta_{\delta, \rho} = \{x : r_\delta(x) \geq \rho\}$ ; on a si  $\rho \leq \rho'$ ,  $\Delta_{\delta, \rho'} \subset \Delta_{\delta, \rho}$ . Et comme

$$\nu\left(\bigcup_{\rho>0} \Delta_{\delta, \rho}\right) = \nu(\Delta) = 1 ,$$

quel que soit  $\eta > 0$ , il existe  $\rho_{\delta, \eta}$ , tel que si  $\rho \leq \rho_{\delta, \eta}$ ,

$$\nu(\Delta_{\delta, \rho}) \geq 1 - \eta .$$

Soient  $\epsilon_0$  et  $K$  les constantes intervenant dans la définition de la multiplicité finie. On peut supposer que  $\eta$  est tel que  $\rho_{\delta, \eta} < \epsilon_0$ . Soit alors  $r < \rho_{\delta, \eta}$  et  $\mathcal{G}$  un recouvrement de multiplicité  $K$  de  $\Delta_{\delta, \rho}$  par des boules  $B(x, r)$ . On a

$$\sum_{\mathcal{G}} r^{d+\delta} \leq \sum_{\mathcal{G}} \nu B(x, r) \leq K ;$$

donc  $\overline{\dim}_B(\Delta_{\delta, \rho}) \leq d + \delta$  et  $\inf\{\overline{\dim}_B Z : \nu(Z) \geq 1 - \eta\} \leq d + \delta$ . Ceci étant vrai pour tout  $\delta$  et tout  $\eta$ , on obtient  $\overline{\dim}_B \nu \leq d$ .  $\square$

De même si  $\underline{\dim}_P \nu(x) \geq d$   $\nu$ -presque sûrement, alors  $\dim_H \nu \geq d$ . Une mesure de probabilité telle qu'il existe une constante  $d$  telle que  $\underline{\dim}_P \nu(x) = \overline{\dim}_P \nu(x) = d$   $\nu$ -presque sûrement est dite exacte dimensionnelle. Vues les inégalités précédentes, toutes les dimensions sont alors égales.

## 6.2 Cas du bord d'un groupe hyperbolique

Dans le Chapitre 2, on majore la dimension de Hausdorff de la mesure harmonique grâce à la dimension ponctuelle; on a donc besoin que  $(\partial X, d_a)$  soit de multiplicité finie. Remarquons que si  $X$  est un arbre, et qu'on munit  $\partial X$  de la distance  $\text{dist}(\xi_1, \xi_2) = e^{-(\xi_1 | \xi_2)}$ , alors les boules de taille  $e^n$  forment une partition de  $\partial X$ , qui est donc bien de multiplicité finie.

**Proposition 6.2.1.** *Soit  $G$  un groupe hyperbolique. Alors son bord hyperbolique  $\partial G$ , muni d'une métrique  $d_a$  définie au (2.1.1) est de multiplicité finie.*

*Démonstration.* Soit  $Z$  un sous-ensemble de  $\partial G$ . Remarquons que si des rayons géodésiques joignant  $o$  à deux points  $\xi_1$  et  $\xi_2$  de  $Z$  passent par un même point  $x$  tel que  $d(o, x) = n$ , alors  $(\xi_1 | \xi_2) \geq n$  et donc (voir Prop. 2.1.1)  $d_a(\xi_1, \xi_2) \leq \lambda a^{-n}$ .

Pour chaque mot  $w$  de longueur  $n$  par lequel passe un rayon géodésique  $[o, \xi[$ , avec  $\xi \in Z$ , on choisit un certain  $\xi_w$  ayant cette propriété et l'on considère la boule centrée en  $\xi_w$  de largeur  $\epsilon = \lambda a^{-n}$ . D'après ce que l'on vient de dire, l'ensemble de ces boules constitue un recouvrement de  $Z$ .

On va maintenant montrer que ces recouvrements sont de multiplicité uniformément bornée en  $n$ . Soit  $n > 0$ ; posons  $\epsilon = \lambda a^{-n}$ . On fixe une boule centrée en un certain point  $\xi$  du bord de taille  $\epsilon : B(\xi, \epsilon)$ ; on note  $w$  le mot de longueur  $n$  par lequel passe le rayon  $[o, \xi[$ . Soit alors  $\xi'$  un autre point dans  $B(\xi, \epsilon)$  et  $w'$  le mot de longueur  $n$  par lequel passe le rayon  $[o, \xi'[$ . Comme  $d_a(\xi, \xi') < \epsilon$ ,  $\lambda^{-1} a^{-(\xi|\xi')} < \lambda a^{-n}$ ; et donc

$$(\xi|\xi') \geq n - 2 \log_a \lambda .$$

Or on a

$$(w|w') \geq \min \{ (w|\xi), (\xi|\xi'), (\xi'|w) \} - 2\delta ;$$

et comme  $(w|\xi) = (\xi'|w) = n$ ,

$$\begin{aligned} (w|w') &\geq \min \{ n, (\xi|\xi') \} - 2\delta \\ &\geq n - 2 \log_a \lambda - 2\delta . \end{aligned}$$

Or  $(w|w') = n - d(w, w')$ ; on déduit donc de ce qui précède

$$d(w, w') \leq 2 \log_a \lambda + 2\delta .$$

Or comme  $G$  est finiment engendré, il n'y a qu'un nombre fini de mots  $w'$  à une distance bornée de  $w$ . □

**Remarque 6.2.1.** *Cette propriété s'étend dans une certaine mesure dans le cas général où  $X$  n'est pas le graphe de Cayley d'un groupe hyperbolique et où  $G$  est un sous-groupe d'isométries de  $X$ . En effet, si l'on suppose que  $G$  est quasi-convexe-cocompact (voir [Coo93]), alors l'orbite de  $o$  sous  $G$  est quasi-isométrique au graphe de Cayley de  $G$ , et la démonstration qui précède s'applique donc également.*

### 6.3 Cas des Grassmanniennes

On désigne par  $P'$  un groupe parabolique quelconque d'un groupe semi-simple  $G$ ;  $G/P'$  est alors une variété lisse compacte. On définit le type de mesure lisse sur  $G/P'$  de la manière suivante : on munit  $G/P'$  d'un atlas  $(U_i, \phi_i)_{i \in I}$ ; et on dit qu'une mesure  $m$  sur  $G/P'$  est lisse si quel que soit  $i$ , l'image de la restriction de  $m$  à  $U_i$  par  $\phi_i$  est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. C'est en particulier le type de la mesure de Haar. Si  $d$  est une distance sur  $G/P'$  qui rend les cartes localement lipschitziennes ainsi que leurs inverses (avec dans  $\mathbb{R}^{\dim G/P'}$  la distance euclidienne), comme  $G/P'$  est compacte, on peut en extraire un recouvrement fini sur lequel les cartes seront lipschitziennes, et ainsi obtenir une constante de lipschitz uniforme. Deux distances ayant cette propriété sont donc équivalentes et induisent par conséquent les mêmes dimensions pour les ensembles. On a cependant besoin de préciser la distance utilisée afin de pouvoir estimer ces dimensions.

Lorsque  $G = SL(d, \mathbb{R})$  et  $P_i$  est un sous-groupe parabolique maximal, on définit sur  $G/P_i$  une distance  $\delta$  ( $K$ -invariante) en le considérant comme un sous-ensemble de l'espace projectif  $\mathcal{P}(\bigwedge_i \mathbb{R}^d)$ . En effet, si  $V$  est un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire, la valeur absolue du sinus de l'angle entre deux droites  $x$  et de  $y$  définit une distance  $\delta(\overline{x}, \overline{y})$  sur  $\mathcal{P}(V)$ . On a en fait :

$$\delta(\overline{x}, \overline{y}) = \sqrt{1 - \frac{\langle x, y \rangle^2}{\|x\|^2 \|y\|^2}}.$$

Lorsque  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  est un espace vectoriel complexe hermitien, la formule

$$\sin^2(\delta(\overline{x}, \overline{y})) = 1 - \frac{\langle x, y \rangle \langle y, x \rangle}{\|x\|^2 \|y\|^2}$$

définit également une distance (distance de Fubini-Study) sur  $\mathcal{P}(V)$  (voir par exemple [Gol99]).

On aura besoin de certaines propriétés "de recouvrement" de ces espaces.

**Définition 6.3.1.** *Un espace métrique  $(X, d)$  est un espace de Besicovich si pour tout sous-ensemble  $Z$  de  $X$  et toute fonction bornée  $r : Z \rightarrow \mathbb{R}^+$ , le recouvrement*

$$\mathcal{G} = \{B(x, r(x)) : x \in Z\}$$

*contient un sous-recouvrement dénombrable dont la multiplicité est bornée par une constante ne dépendant que de  $(X, d)$ .*

Le lemme de Besicovich affirme justement que les  $\mathbb{R}^n$  munis de la distance euclidienne sont des espaces de Besicovich. Remarquons qu'un espace de Besicovich est un espace de multiplicité finie.

Comme on l'a dit précédemment, on peut choisir des cartes sur  $G/P'$  (muni de  $\delta$ )  $\lambda$ -lipchitziennes ainsi que leurs inverses,  $\lambda$  étant uniforme. Les espaces  $(G/P', \delta)$  héritent donc de la propriété de Besicovich de  $\mathbb{R}^{\dim G/P'}$ . Cela a également pour conséquence, comme la dimension telle qu'on l'a définie est invariante par homéomorphisme lipschitzien d'inverse également lipschitzien, que les mesures lisses ont pour dimension celle de l'espace qui les porte (sur  $\mathbb{R}^{\dim G/P'}$  c'est une conséquence du théorème de Lebesgue).





# Bibliographie

- [Ave76] A. Avez. Croissance des groupes de type fini et fonctions harmoniques. In *Théorie ergodique*, volume 532 of *Lecture Notes in Math.*, pages 35–49. Springer, Berlin, 1976.
- [Bal95] W. Ballmann. *Lectures on spaces of nonpositive curvature*, volume 25 of *DMV Seminar*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1995.
- [Ben97] Y. Benoist. Propriétés asymptotiques des groupes linéaires. *Geom. Funct. Anal.*, 7(1) :1–47, 1997.
- [BGS85] W. Ballmann, M. Gromov, and V. Schroeder. *Manifolds of nonpositive curvature*, volume 61 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1985.
- [BL93] Y. Benoist and F. Labourie. Sur les difféomorphismes d’Anosov affines à feuilletages stable et instable différentiables. *Invent. Math.*, 111(2) :285–308, 1993.
- [CDP90] M. Coornaert, T. Delzant, and A. Papadopoulos. *Les groupes hyperboliques de Gromov*, volume 1441 of *Lecture Notes in Math.* Springer, Berlin, 1990.
- [Cha66] S. D. Chatterji. Masse, die von regelmässigen Kettenbrüchen induziert sind. *Math. Ann.*, 164 :113–117, 1966.
- [CLM84] P. Chassaing, G. Letac, and M. Mora. Brocot sequences and random walks in  $SL(2, \mathbf{R})$ . In *Probability measures on groups, VII (Oberwolfach, 1983)*, volume 1064 of *Lecture Notes in Math.*, pages 36–48. Springer, Berlin, 1984.
- [Coo90] M. Coornaert. *Sur les groupes proprement discontinus d’isométries des espaces hyperboliques au sens de Gromov*. 1990. Thèse, Université Louis Pasteur, Strasbourg, 1990.
- [Coo93] M. Coornaert. Mesures de Patterson-Sullivan sur le bord d’un espace hyperbolique au sens de Gromov. *Pacific J. Math.*, 159(2) :241–270, 1993.
- [Der80] Y. Derriennic. Quelques applications du théorème ergodique sous-additif. *Astérisque*, 74 :183–201, 1980.
- [Der86] Y. Derriennic. Entropie, théorèmes limite et marches aléatoires. In *Probability measures on groups, VIII (Oberwolfach, 1985)*, volume 1210 of *Lecture Notes in Math.*, pages 241–284. Springer, Berlin, 1986.
- [DM61] E. B. Dynkin and M. B. Maljutov. Random walk on groups with a finite number of generators. *Soviet Math. Dokl.*, 2 :399–402, 1961.

- [Ebe96] P. B. Eberlein. *Geometry of nonpositively curved manifolds*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, 1996.
- [Fur63] H. Furstenberg. A Poisson formula for semi-simple Lie groups. *Ann. of Math.*, 77 :335–386, 1963.
- [Fur71] H. Furstenberg. Random walks and discrete subgroups of Lie groups. In *Advances in Probability and Related Topics, Vol. 1*, pages 1–63. Dekker, New York, 1971.
- [Fur73] H. Furstenberg. Boundary theory and stochastic processes on homogeneous spaces. In *Harmonic analysis on homogeneous spaces*, volume 26 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 193–229. A. M. S., Providence, R.I., 1973.
- [Fur98] H. Furstenberg. Stiffness of group actions. In *Lie groups and ergodic theory (Mumbai, 1996)*, volume 14 of *Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math.*, pages 105–117. Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 1998.
- [GdlH90] É. Ghys and P. de la Harpe, editors. *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, volume 83 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1990.
- [GJT98] Y. Guivarc'h, L. Ji, and J. C. Taylor. *Compactifications of symmetric spaces*, volume 156 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1998.
- [GM89] I. Ya. Gol'dsheid and G. A. Margulis. Lyapunov exponents of a product of random matrices. *Russ. Math. Surv.*, 44(5) :13–60, 1989.
- [Gol99] W. M. Goldman. *Complex hyperbolic geometry*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1999. Oxford Science Publications.
- [GR85] Y. Guivarc'h and A. Raugi. Frontière de Furstenberg, propriétés de contraction et théorèmes de convergence. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 69(2) :187–242, 1985.
- [Gui80] Y. Guivarc'h. Sur la loi des grands nombres et le rayon spectral d'une marche aléatoire. *Astérisque*, 74 :47–98, 1980.
- [Gui90] Y. Guivarc'h. Produits de matrices aléatoires et applications aux propriétés géométriques des sous-groupes du groupe linéaire. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 10(3) :483–512, 1990.
- [Hel78] S. Helgason. *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, volume 80 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press Inc., New York, 1978.
- [Kai85] V. A. Kaimanovich. An entropy criterion of maximality for the boundary of random walks on discrete groups. *Soviet Math. Dokl.*, 31 :193–197, 1985.
- [Kai89] V. A. Kaimanovich. Lyapunov exponents, symmetric spaces and a multiplicative ergodic theorem for semisimple Lie groups. *J. Soviet Math.*, 47 :2387–2398, 1989.

- [Kai90] V. A. Kaimanovich. Invariant measures of the geodesic flow and measures at infinity on negatively curved manifolds. *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, 53(4) :361–393, 1990.
- [Kai98] V. A. Kaimanovich. Hausdorff dimension of the harmonic measure on trees. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 18(3) :631–660, 1998.
- [Kai00] V. A. Kaimanovich. The Poisson formula for groups with hyperbolic properties. *Ann. of Math.*, 152(3) :659–692, 2000.
- [KL90] Y. Kifer and F. Ledrappier. Hausdorff dimension of harmonic measures on negatively curved manifolds. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 318(2) :685–704, 1990.
- [KPW01] Y. Kifer, Y. Peres, and B. Weiss. A dimension gap for continued fractions with independent digits. *Israel J. Math.*, 124 :61–76, 2001.
- [KS96] A. Katok and R. J. Spatzier. Invariant measures for higher-rank hyperbolic abelian actions. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 16(4) :751–778, 1996.
- [KV83] V. A. Kaimanovich and A. M. Vershik. Random walks on discrete groups : boundary and entropy. *Ann. Probab.*, 11(3) :457–490, 1983.
- [Led83] F. Ledrappier. Une relation entre entropie, dimension et exposant pour certaines marches aléatoires. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 296(8) :369–372, 1983.
- [Led84] F. Ledrappier. Quelques propriétés des exposants caractéristiques. In *École d’été de probabilités de Saint-Flour, XII—1982*, volume 1097 of *Lecture Notes in Math.*, pages 305–396. Springer, Berlin, 1984.
- [Led85] F. Ledrappier. Poisson boundaries of discrete groups of matrices. *Israel J. Math.*, 50(4) :319–336, 1985.
- [Led01] F. Ledrappier. Some asymptotic properties of random walks on free groups. In *Topics in probability and Lie groups : boundary theory*, volume 28 of *CRM Proc. Lecture Notes*, pages 117–152. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.
- [Lin04] G. Link. Hausdorff dimension of limit sets of discrete subgroups of higher rank Lie groups. *Geom. Funct. Anal.*, 14(2) :400–432, 2004.
- [MM04] J. Mairesse and F. Mathéus. Random walks on free products of cyclic groups and on artin groups with two generators. *preprint*, 2004.
- [Mos73] G. D. Mostow. *Strong rigidity of locally symmetric spaces*. Ann. of Math. Studies, No. 78. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1973.
- [Pes97] Y. B. Pesin. *Dimension theory in dynamical systems*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, 1997.
- [PUZ89] Feliks Przytycki, Mariusz Urbański, and Anna Zdunik. Harmonic, Gibbs and Hausdorff measures on repellers for holomorphic maps. I. *Ann. of Math.*, 130(1) :1–40, 1989.
- [Ver00] A. M. Vershik. Dynamic theory of growth in groups : entropy, boundaries, examples. *Russ. Math. Surv.*, 55(4) :667–733, 2000.